

FONDO PIZZOPALCONE



35193

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XIII

Palchetto

Num.º d'ordine 1-

9-6-5

NAZIONALE

B. Prov.

I

1508

NAPOLI

VITT. EM. III



B. Prov.

I -

1508



ELEMENTI
DI
ARITMETICA



THE
HONORABLE
MEMBER
OF THE
LEGISLATIVE
COUNCIL

607697 SBN

ELEMENTI
DELLA
SCIENZA DEL CALCOLO

ESPOSTI

DA M. ZANNOTTI

PROFESSORE DI MECCANICA RAZIONALE NELLA REGIA UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

PRIMA PARTE

ELEMENTI DI ARITMETICA

3^a EDIZIONE

INTERAMENTE RIFATTA DALL'AUTORE.



NAPOLI

TIPOGRAFIA DI FEDERICO VITALE.

Largo Regina Coeli n° 2.

1852.

1000000

1000000

INDICE

PREFAZIONE	pag. v
----------------------	--------

LIBRO PRIMO.

TEORIA DEL CALCOLO NUMERICO.

SEZIONE PRIMA — CALCOLO DEI NUMERI INTERI.

Definizioni	1
Numerazione	5
Addizione	6
Sottrazione	9
Moltiplicazione	11
Divisione	17
Numeri primi. Caratteri di divisibilità. Massimo divisore comune. Mi- nimo dividendo comune.	26
osservazioni sulle prove di calcolo e sul numero delle operazioni ele- mentari.	36

SEZIONE SECONDA — CALCOLO DEI NUMERI FRAZIONARI.

Definizioni	40
Teoremi sulle frazioni	41
Addizione dei fratti	48
Sottrazione dei fratti	51
Moltiplicazione dei fratti	53
Divisione dei fratti	56
Definizioni e teoremi relativi alle frazioni decimali	59
Calcolo dei fratti decimali	62
Riduzione dei fratti ordinari a decimali.	67
Riduzione dei fratti decimali ad ordinari	74

SEZIONE TERZA — POTENZE E RADICI.

Composizione della 2 ^a e 3 ^a potenza.	76
Estrazione della radice quadrata	84
Estrazione della radice cubica	91
Numeri incommensurabili o irrazionali	97
Metodo per abbreviare il calcolo di approssimazione delle radici	101

SEZIONE QUARTA — PROPORZIONI, PROGRESSIONI E LOGARITMI.

Definizioni	107
-----------------------	-----

Teoremi sullo ragioni e proporzioni	108
Teoremi sull'equidifferenza	114
Nozioni fondamentali sullo progressioni.	117
Progressione aritmetica.	119
Progressione geometrica	123
Teoria dei logaritmi	126
Uso delle tavole logaritmiche.	137

SEZIONE QUINTA — REGOLE PER CALCOLARE SU I NUMERI APPROSSIMATI.

Regola per sopprimere col minore errore possibile da un dato numero una certa quantità di cifre decimali	146
Regola per ottenere il limite di esattezza del prodotto di più fattori approssimati.	148
Regola per calcolare il limite di esattezza del quoziente di due numeri approssimati.	154
Regola per calcolare il limite di esattezza della radice 2 ^a di un numero approssimato	156

LIBRO SECONDO.

APPLICAZIONI DELLE TEORICHE PRECEDENTI.

INTRODUZIONE.	161
------------------------------	-----

SEZIONE PRIMA — SISTEMA METRICO.

Caratteri che deve avere un sistema metrico perfetto	164
Esposizione del sistema metrico del Regno di Napoli e del sistema metrico francese	168
Tavola di misura.	173
Calcolo dei numeri complessi	181

SEZIONE SECONDA — SOLUZIONE DI PROBLEMI

Principi generali sulle equazioni e regola di falsa posizione	194
Regola del tre, e calcolo dell'interesse semplice	203
Regola di sconto e di società.	211
Regola congiunta, e di alligazione	214
Problemi d'interesse composto	219

PREFAZIONE

Questa 3^a edizione è un lavoro interamente nuovo, come ciascuno potrà rilevare comparandola alla 2^a; ed i cangiamenti che vi si osservano rispetto all'ordinamento delle teorie, sono stati in gran parte motivati da osservazioni ch'ebbero la cortesia di comunicarmi parecchi professori che mi hanno onorato adottando l'opera come testo delle loro lezioni. Rendo ad essi questa testimonianza di giustizia.

Ciò che poi mi ha indotto a dovermi addossare la non lieve fatica di una novella redazione, si è stato che meditando continuamente, come è mia usanza, ciò che aveva fatto nelle edizioni precedenti, non trovai in fine che l'esposizione delle teorie fosse abbastanza soddisfacente all'idea che mi son fatta di un trattato di aritmetica, considerata qual primo fondamento della scienza del calcolo.

Se non vado errato, sembrami che l'aritmetica si dovesse riguardare sotto due aspetti differenti: o come l'esposizione delle **norme** necessarie ad esattamente eseguire i calcoli dell'ordinario computo mercantile; ovvero come una scienza, la quale mentre offre le prime basi all'Algoritmia generale, potesse poi servire di complemento alle diverse branche del sapere matematico, in cui non vi ha teorica, trascendente che sia, la quale nelle sue applicazioni non si riduca alla ricerca di un numero.

Considerandola sotto il primo aspetto, le vedute teoretiche ne divengono oziose. Dopochè le regole delle quattro operazioni elementari sui numeri interi, i fratti ordinari, i decimali ed i complessi saranno state chiaramente formolate, ed appoggiate a più esempj che servano ad esse di schiarimento; tutto il resto non dovrà essere che una metodica collezione di problemi, destinati a formare nell'allievo un certo criterio, che dovrà guidarlo nel definire il modo di soluzione conveniente alla natura del quesito. Egli è un tempo malamente speso quello che si consuma in far comprendere la genesi delle regole ad un giovinetto che si propone di apparar l'abbaco per servirsene al banco di un mereante. Dapoichè, se per la dotta analisi fattagli dal libro o dal maestro (ciò ch'è lo stesso) egli avrà potuto ben comprendere in qual modo il quoziente dipenda dal dividendo e divisore, la teoria sostituita all'abito pratico non lo preserverà dal fallire non di rado il valore di un quoziente nel caleolare il prezzo di una certa quantità di merce. Così gli avviene che concentrandosi la sua attenzione su cose per lui inutili, la distrae da quelle che gli sono veramente indispensabili.

Tutt'altra poi vuol esser l'aritmetica che si dovrà porre a base di un corso di scienze esatte, quando anche si dovesse restringere tra i limiti degli elementi. Imperocchè formolando la matematica sotto l'espressione più generale, essa non è che la scienza della dipendenza delle quantità, o per usare una voce tecnica, la scienza delle funzioni. A questo scopo finale deve mirare l'insegnamento fin dai suoi primi passi, e quindi debbono ad esso intendere le opere destinate ad attuarlo. Nè si creda di voler pretendere molto, essendo che nel fatto la cosa non va diversamente. Quando, a cagion di esempio, si vuol dichiarare la genesi della regola di addizione, che altro si fa se

non dimostrare il modo con cui le unità, decine, centinaia ec. della somma dipendono dalle unità, decine, centinaia ec. dei numeri che debbono comporla? Ed ecco che anche la dimostrazione della prima forma del calcolo numerico sta tutta nel dichiarare l'esistenza di una funzione.

Da ciò poi deriva che nello studiare scientificamente le forme del calcolo, non tanto importi lo intender l'animo all'esattezza del risultamento, quanto alla chiara percezione della dipendenza di ciò che si cerca da ciò ch'è dato. E se a questo intento, come a precipuo obbietto, porranno mente sì gli autori dei trattati di aritmetica, che i professori * destinati ad insegnarla, gli allievi, formandosi a poco a poco un certo abito logico di considerare nelle diverse quistioni la dipendenza del numero richiesto da più altri dati, si eleveranno gradatamente a quelle generali vedute sulle funzioni, di cui sentiranno tutta l'utilità nello studio dell'algebra. Ma questo non può farsi senza che l'allievo vegga talvolta sostituiti i simboli letterali alle cifre in certe quistioni numeriche, la cui generalità richiede l'uso dei segni che aiutino a prescindere dall'individualità dei valori. Per la qual cosa non posso seguir la sentenza di coloro che vorrebbero i così detti segni algebrici interamente eliminati dai trattati elementari di aritmetica per la ragione, come essi dicono, che la vista di una lettera in un calcolo di numeri reca sgomento nell'animo degli allievi. In venti e più anni d'insegnamento non ho osservato nulla di simile nei figliuoli che uniscono l'attenzione ad un certo grado d'intelligenza (e saria stoltezza pretendere dai metodi quello intelletto che Dio non ha voluto donare.); e per l'opposto ho veduto che procedendo per la

¹ Dico professori, poichè l'è una vera calamità pubblica, che ogni maestro di abbieci si creda idoneo ad istruire i figliuoli nei due più difficili rami d'insegnamento; la grammatica e l'aritmetica.

linea indicata, purchè si sappia procedere gradatamente, non solo gli allievi fanno molto profitto nello studio dell'aritmetica, ma nel passare da questa all'algebra non sono arrestati da quella inconcepibilità d'idea, che non di rado si presenta insuperabile a coloro, la cui mente si è tenuta, per così dire, inceppata tra le cifre. Voi dopo aver occupato lo spirito dei vostri allievi di problemi, nei quali avete innestato ogni numero all'idea di un lavoro, di un prezzo, di un capitale, e così via discorrendo; vi presentate in un giorno annunziando il cominciamento di un corso di algebra, e prendendo le mosse dal dichiarare la più elementare funzione, voi vi fate a dire che a , b , c , cc. indicando grandezze qualunque, purchè misurabili da una stessa unità, la loro somma sarà espressa da $a+b+c+cc.$ È mai possibile che l'alunno si elevi così di botto dalle idee individuali più grette ad un concetto così generale? Pur tuttavia nel fatto dell'ordinario insegnamento matematico si suppone la possibilità di questo slancio — Percorrendo quest'opera il lettore potrà giudicare se dall'esposizione delle forme elementari del calcolo alla risoluzione dei problemi che danno termine al libro II, io sia riuscito a procedere con tale gradazione nella generalità dei simboli da poter rendere insensibile per la sua continuità il passaggio dall'aritmetica all'algebra.

Per compiere le ragioni dell'ordinamento di quest'opera mi rimane a dir qualche cosa sui limiti tra i quali l'ho definita. Vi è un carattere che distingue le quistioni aritmetiche dalle algebriche, desunto dalla loro essenza, ed indipendente dalla diversa natura dei segni di cui queste scienze si servono nell'espressione delle quantità: tal quistione, quantunque formolata e svolta colle lettere, sarà non pertanto intrinsecamente aritmetica, mentre tal'altra sebbene ristretta tra l'individualità dell'espressioni nume-

riche sarà purtuttavia una vera quistione algebrica. Lo spirito delle dottrine aritmetiche è quello di guardare al risultamento che si cerca, indipendentemente dal modo di ottenerlo, purchè esatto; lo spirito in vece delle teorie algebriche è quello di ottenere il risultamento in funzione delle quantità che son date. Prendiamo ad esempio i due numeri 4827 e 5643: essendo $4827 = 4.10^3 + 8.10^2 + 2.10 + 7$ e $5643 = 5.10^3 + 6.10^2 + 4.10 + 3$, sarà

$$\begin{aligned} 4827 \cdot 5643 &= (4.10^3 + 8.10^2 + 2.10 + 7)(5.10^3 + 6.10^2 + 4.10 + 3) \\ &= (4.10^3 + 8.10^2 + 2.10 + 7)5.10^3 \\ &\quad + (4.10^3 + 8.10^2 + 2.10 + 7)6.10^2 \\ &\quad + (4.10^3 + 8.10^2 + 2.10 + 7)4.10 \\ &\quad + (4.10^3 + 8.10^2 + 2.10 + 7)3. \end{aligned}$$

Ed ecco l'espressione del prodotto di due numeri in funzione dei valori propri e di sito delle cifre che li rappresentano. Or in questa espressione ognuno rievolve la regola di moltiplicazione usata in aritmetica; questa regola non è dunque che la traduzione in linguaggio ordinario della legge di composizione di una funzione algebrica. Al contrario se volessimo esprimere il quoziente di due polinomi in funzione dei termini che li compongono, mercè la nota regola di divisione, c'incontreremmo in un problema difficilissimo; poichè il metodo di determinazione di un simile quoziente non è traduzione di una funzione, ma è una via indiretta che mena ad un esatto risultamento, perelchè disegnata dalla legge di composizione dei prodotti parziali, da cui si considera formato il dividendo. La divisione dei polinomi è dunque una vera operazione aritmetica eseguita su quantità letterali.

Dietro questo principio di filosofia matematica è chiaro che, oltre l'esposizione delle quattro operazioni elementari su gl'interi, i fratti ordinari, i decimali ed i complessi, sulla pertinenza delle quali dottrine all'aritmetica non cade verun dubbio, debbono ancora alla stessa scienza appartenere.

— 1° *L'estrazione delle radici*, poichè non sono calcolate per mezzo della formola

$$(a+b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{m} a^{\frac{1}{m}-1} \cdot b + \frac{\frac{1}{m}(\frac{1}{m}-1)}{2} a^{\frac{1}{m}-2} \cdot b^2 + \text{cc.}$$

la quale ne darebbe i valori in funzione delle cifre del numero dato, ma sono dedotte con un metodo intrinsecamente aritmetico dalla legge di composizione della potenza.

— 2° *La teoria neperiana dei logarithmi*, vale a dire la loro esposizione in quanto che costituiscono un mezzo aritmometrico, rimettendone poi all'algebra la dottrina euleriana ossia la loro deduzione dalle leggi delle funzioni esponenziali. ' Quindi nell'aritmetica debbono ancora aver luogo le teorie delle proporzioni e progressioni che servono di fondamento al principio di Nepero.

Ma col definire le materie spettanti all'aritmetica in conseguenza della natura stessa delle sue dottrine, non intendiamo dire che in un trattato elementare di questa scienza debbono esser collocate tutte le teorie che le appartengono; essendovi parecchie quistioni relative ai numeri che richieggono il soccorso dell'analisi più trascendente. Diciamo soltanto esser d'uopo non eliminare da simili opere quelle teorie che mentre sono di natura aritmetica non richieggono principî superiori agli elementari.

1 Vi sono matematici, daltronde chiarissimi, i quali opinano che la teorica euleriana dei logarithmi renda in certo modo superflua l'esposizione della dottrina neperiana; e che in conseguenza i logarithmi vauuo naturalmente collocati nell'algebra. Alla loro opinione possiamo, e certamente con vantaggio, controporre quella di un illustre corpo scientifico: l'Accademia delle Scienze di Bruxelles premiava nel 1810 l'opera del sig. Vallée — *Traité sur la théorie élémentaire des logarithmes* — nella quale questo distinto geometro francese, tenendo sempre al principio di Nepero, dà un'esposizione didattica così compiuta della dottrina dei logarithmi che ne deduce eziandio l'espressione della derivata logarithmica.

LIBRO PRIMO.

TEORIA DEL CALCOLO NUMERICO.

SEZIONE PRIMA.

Calcolo dei numeri interi.

CAPO PRIMO.

Definizioni.

1. Col nome di *grandezza* o *quantità*¹ si dinota ogni cosa, che sia considerata soltanto nella possibilità di essere aumentata o diminuita²: tali sono le linee, le superficie, i volumi, le forze, i pesi, il tempo, ec. ec.

¹ Queste due espressioni riguardate come sinonime dalla comune dei matematici, a rigore nol sono; poichè se colla prima (*grandezza*) indichiamo la possibilità di aumento o diminuzione, colla seconda (*quantità*) disegniamo la grandezza in quanto che essa è comparata ad un'altra, ossia è misurata. Così riconoscendo una *grandezza* nella capacità di una botte, ci proponiamo di determinare la *quantità* di palmi cubici ch'essa contiene. L'espressione *quantità* dunque è piuttosto sinonima di *numero* che di *grandezza*.

² D'Alembert poneva in dubbio l'esattezza di questa definizione, facendo osservare che quantunque la luce presenti aumento o diminuzione, purtuttavia non può dirsi che sia propriamente una *grandezza*. Egli avrebbe dovuto piuttosto considerare che una grandezza debba essere misurabile, perchè si possa sottoporre ad operazioni algebriche. Che il calore possa aumentare e diminuire, è una cognizione antica quanto l'uomo; ed intanto l'applicazione del calcolo ai fenomeni termici non è cominciata, nè poteva cominciare, prima che si fosse inventato il termometro. L'inflessione di una curva è ancor essa una grandezza, che per divenire calcolabile attendeva la bella teoria di Huygens sul circolo osculatore. E quantunque la fotometria non abbia raggiunto la per-

2. *Misurare una grandezza* vuol dire compararla ad un'altra della medesima specie, denominata *unità*. Così il *rotolo* è unità di peso, il *palm* è unità di lunghezza, l'*ora* è unità di tempo, ec.

L'*unità* dev'essere necessariamente definita, sia dalla convenzione degli uomini, sia dall'ordine naturale delle cose: quindi se ne distinguono due specie, l'una *naturale*, l'altra *convenzionale*. La *canna*, per esempio, il *miglio*, ec. sono unità convenzionali di lunghezza; il *giorno*, ch'è definito da due passaggi consecutivi del sole per lo stesso meridiano; l'*anno*, ch'è determinato dal ritorno del sole ad un medesimo punto dell'eclittica, sono unità naturali di tempo.

3. Il rapporto che risulta dalla comparazione di una grandezza alla sua unità, costituisce il *numero*; il quale può essere *intero* o *frazionario*, *astratto* o *concreto*.

È *intero* il numero, quando esprime una o più unità; è *frazionario* se indica una o più parti dell'unità. *Uno*, *dodici*, *cento* sono numeri interi; *un quarto*, *tre ottavi*, ec. sono numeri frazionari.

In parecchi trattati di Aritmetica si distinguono ancora i numeri in *semplici* e *composti*, secondochè vengono rappresentati da una o da più cifre. Ma questa distinzione, la quale confonde l'idea col segno che la rappresenta, vuol essere del tutto rigettata.

Sia il numero intero o frazionario, sarà *astratto* se lo consideriamo indipendente dalle grandezze, di cui esprime il rapporto; e *concreto* se lo riguardiamo nelle grandezze comparate. Dicendo, per esempio, *sette canne*, esprimiamo di aver comparato una certa lunghezza a quella di una canna, e di aver trovato che questa vi è contenuta sette volte: il rapporto *sette* si è dunque considerato tra due lunghezze, e perciò costituisce un numero intero concreto. Ma se avessimo detto *sette* soltanto, allora avremmo avuto un rapporto indipendente da ogni sorta di grandezze, e quindi un numero intero astratto¹.

fezione della *termometria*, ciò non ostante le ricerche sperimentali di Arago, ed i risulamenti analitici di Fresnel e di Cauchy hanno fatto dare un gran passo alla scienza della luce.

¹ La distinzione del numero in *astratto* e *concreto* sembra a prima vista non

4. La misura di una grandezza può essere *diretta* o *indiretta*. È *diretta*, quando la comparazione di una grandezza alla sua unità si ottiene immediatamente per mezzo di esperimento: così determiniamo il peso di un corpo, adagiandolo in un piatto di bilancia, che poi riduciamo ad esatto equilibrio, caricando l'altro piatto di libbre, once, ec. Ma se questa comparazione immediata fosse impossibile, o almeno laboriosa, allora sarà d'uopo ricorrere alla misura *indiretta*, ossia alla determinazione del numero per mezzo del ragionamento. Così non può l'astronomo sperimentare quante volte la canna sia contenuta nella distanza che separa il centro della terra da quello del sole; nè dovendo spartire 3827 ducati a 100 persone, si avrebbe la pazienza di determinare la parte dovuta ad ognuna, col dare ad esse successivamente un ducato finchè rimanesse una somma minore di 100 ducati, indi un carlino fino ad ottenere un avanzo minore di 100 carlini, e così via discorrendo. In casi simili talvolta è indispensabile, e tal'altra è utile, che il numero richiesto venga determinato per mezzo delle relazioni che la scienza ha trovato tra le grandezze da misurarsi ed altre, la cui misura si può direttamente ottenere. E la serie delle operazioni necessarie a poter determinare un numero per mezzo di altri numeri dati, costituisce propriamente il *calcolo numerico*, di cui l'*Aritmetica* espone le leggi.

CAPO SECONDO.

Numerazione.

5. Un sistema di nomi per esprimere i numeri, ed un altro di cifre per disegnarli, costituiscono la *numerazione*, nella quale sta il primo fondamento delle leggi del calcolo.

6. Il sistema dei nomi, ossia la *numerazione parlata*, median-
doversi ammettere, come quella che tende a falsare l'idea di rapporto, la quale è essenzialmente astratta. Ma l'espressione di numero concreto non essendo che un'abbreviazione di numero considerato nelle grandezze tra le quali esiste, si può sotto questa veduta ritenere.

te la combinazione di poche voci radicali ci offre il mezzo di poter nominare qualsivoglia numero, per quanto richieggono i bisogni delle scienze e del commercio. Ed il principio di questo sistema sta nel comporre i numeri della *serie naturale* (uno, due, tre, ec.) in tanti ordini diversi, l'uno superiore all'altro secondo una legge costante.

L'ordine primo, ovvero elementare, è quello dei numeri che si estendono da *uno* a *nove*, ed a cui sono assegnati i nomi *uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove*. Questi numeri costituiscono le *unità* propriamente dette, o meglio *unità del 1° ordine*.

Dall'unione di dieci unità del 1° ordine risulta una *decina* ossia *unità del 2° ordine*; la quale aggiungendosi successivamente a se stessa, forma *due decine* o *venti*, *tre decine* o *trenta*,..... *nove decine* o *novanta*.

Similmente dall'unione di dieci decine è formato il *centinaio*; ch'è l'*unità del 3° ordine*; e dalla quale poi risultano *duecento*, *trecento*, *quattrocento*,..... *novecento*.

E progredendo sempre nello stesso modo, si hanno dalle centinaia le *migliaia*; da queste le *decine di migliaia*; indi le *centinaia di migliaia*, i *milioni*, ec.

7. Dal fin qui detto rilevasi chiaramente che il principio della numerazione parlata è riposto nell'aggruppamento dei numeri della serie naturale in tante unità, l'una dieci volte maggiore dell'altra; principio, che si esprime più brevemente, dicendo; *il sistema di numerazione ha per base dieci*.

8. Dieci segni 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, dei quali i primi nove diconsi *cifre significative* e l'ultimo *cifra ausiliaria* o *zero*, compongono gli elementi della *numerazione scritta*. Con queste dieci cifre possiamo rappresentare qualsivoglia numero intero, ponendo che oltre al loro *valore proprio*, che disegna la quantità delle unità, esse ne possano rappresentare l'ordine per mezzo del posto che occupano le une rispetto alle altre. E poichè, esprimendo un numero colla parola, proferiamo i diversi ordini di unità dal massimo al minimo, e nella scrittura procediamo dalla sini-

stra alla destra; perciò il *valore di sito* attribuito alle cifre si fa nello stesso senso diminuire di dieci in dieci, vale a dire che ogni cifra scritta alla destra di un'altra indicherà unità dieci volte minori. Così *settemila-novecento-trentasei* sarà rappresentato dal sistema di cifre 7936.

Se tra i diversi ordini di unità, componenti un dato numero, mancasse uno o più degli ordini subordinati, bisognerebbe farne occupare il posto da altrettanti zeri, per conservare alle cifre il rispettivo valore di sito: così i numeri *cinquemila e quattro, tremila e settecento* saranno scritti 5004, 3700.

9. Dalla legge del valore di sito delle cifre risulta che un numero si renderà 10, 100, 1000, ec. volte maggiore, aggiungendo alla sua destra 1, 2, 3, ec. zeri, poichè operando in tal modo ogni cifra disegnerà un valore 10, 100, 1000, ec. volte più grande; e viceversa un numero, che sia terminato da zeri, diverrà 10, 100, 1000, ec. volte minore, togliendone 1, 2, 3, ec. zeri.

10. Siccome la numerazione parlata compone i numeri della serie naturale in *unità decine e centinaia del 1° ordine, unità decine e centinaia di migliaia, unità decine e centinaia di milioni* ec.; così per agevolare la lettura di un numero scritto, se ne dividono le cifre in ternari progredendo dalla destra verso la sinistra, come si vede nel seguente numero *trentaquattro milioni, novecento cinquantasette mila, novecento sessantatré*.

34 937 963. ¹

1 Una volta che l'allievo avrà apparato la divisione delle cifre in ternari, e che il 1° ternario a destra contiene unità decine e centinaia del 1° ordine, il 2° unità decine e centinaia di migliaia, il 3° unità decine e centinaia di milioni, ec. egli leggerà facilmente ogni numero scritto, la cui quantità di cifre non ecceda i limiti della numerazione parlata. Ma non avverrà lo stesso, quando si tratterà di scrivere un numero dettato, che presenti diversi vóti nella successione delle unità: lo si vedrà allora procedere a tentoni nel definire la quantità di zeri che dovrà sostituire agli ordini che mancano. E ciò proviene dal perchè nell'esercizio di lettura egli fa sempre il suo conto progredendo da destra a sinistra, ed in conseguenza si rende abituale la serie decimale nell'ordine crescente; mentre per iscrivere esattamente un numero dettato, che nella successione delle unità suddecuple presenta una o più lacune, egli dovrebbe saper percorrere con eguale speditezza la serie decimale nell'ordine decrescente, al

CAPO TERZO.

Addizione.

11. Scopo di questa operazione di calcolo è la soluzione del seguente problema: *dati più numeri, riferiti alla stessa unità, unirli in un solo, che dicesi somma.*

12. Volendosi semplicemente indicare l'addizione di più numeri dati, si scriverà tra essi il segno $+$ che si pronunzia *più*. Così

$$7 + 5 + 9 + 3 + 4$$

indica che si cerca la somma dei numeri 7, 5, 9, 3, 4.

13. La somma dei numeri rappresentati da una sola cifra non si ottiene altrimenti che aggiungendo successivamente alle unità di un primo numero quelle di un secondo, alla somma che ne ri-

quale l'esercizio di lettura non ha dato giammai occasione di pensare. È questa novella abitudine che l'allievo deve acquistare, perchè possa scrivere il numero dettato colla stessa facilità, con cui lo leggerebbe se fosse scritto. A tal uopo, seguiti una quindicina di zeri l'un dopo l'altro, si facciano pronunziare dall'allievo i loro valori di sito prima da destra a sinistra, indi in senso contrario, e si ripeta questo esercizio, finchè si mostri egualmente spedito nel percorrere l'una e l'altra serie. Allora si detti un numero, e sia *otto bilioni cinquemila e quattro*, e si vedrà che l'allievo pronunziando, a misura che ne scriverà i valori propri, i successivi ordini suddecupli dai bilioni alle unità di 1° ordine, dirà *zero* per ciascuno degli ordini mancanti; e così scriverà il numero dettato colla stessa sicurezza di ben fare, colla quale lo avrebbe letto, se fosse stato scritto.

1 Comunemente si dice che i numeri per potersi addizionare debbono essere omogenei. Ma questa condizione è sufficiente pel soli numeri astratti.

Rispetto poi ai numeri concreti la loro omogeneità o eterogeneità non può dipendere che dalla natura della grandezza, di cui ci danno la misura. Saranno in conseguenza omogenei tutti i numeri che disegnano lunghezze, tutti quelli che esprimono pesi, ec. Così 32 canne, 25 leghe, 72 piedi sono numeri omogenei, ed intanto non si possono addizionare; poichè la somma $129 = 32 + 25 + 72$ a quale delle tre unità si rapporterebbe? — La possibilità della loro addizione evidentemente richiede che le tre lunghezze siano misurate dalla canna, o dalla lega o dal piede; vale a dire che i numeri abbiano comune una stessa unità.

sulta quelle di un terzo, e così di seguito. Ma per diuturna consuetudine il nostro spirito acquista tale speditezza in fare queste composizioni, che appena pronunziati i numeri ne diciamo la somma, come se l'avessimo conosciuta a primo intuito. Così dovendo eseguire l'addizione

$$7 + 8 + 9 + \dots$$

diciamo: *sette più otto fanno quindici, più nove abbiamo ventiquattro*, ec.

14. Essendo spediti nel comporre le somme dei numeri di una cifra, riesce facilissima l'addizione di quelli che sono rappresentati da più cifre. Sia

$$3794 + 587 + 73 + 925$$

l'addizione da doversi eseguire. Decomponendo i numeri dati nei diversi ordini di unità, che ne formano gli elementi, abbiamo

$$3794 = 300 + 700 + 90 + 4$$

$$587 = \dots\dots 500 + 80 + 7$$

$$73 = \dots\dots\dots 70 + 3$$

$$925 = \dots\dots 900 + 20 + 5$$

Perciò addizionare i numeri che sono a sinistra del segno = (che si legge *eguale*) sarà la stessa cosa che addizionare i loro equivalenti che stanno a destra dello stesso segno. E poichè questi ultimi non presentano che numeri di una sola cifra significativa, così la soluzione del quesito proposto parteciperà di quella prontezza di operare che avremo acquistata nel comporre i numeri di una cifra.

Or volendo addizionare i numeri che sono a destra del segno di eguaglianza, dovremo comporre tante somme parziali, quanti sono gli ordini di unità che si contengono nei numeri dati; e regolare in modo la successione di queste particolari addizioni, che le unità di ordine superiore, risultanti dalla somma di quelle di ordine immediatamente inferiore, si possano aggiungere facilmente alla somma di unità, a cui sono consimili. Quindi i numeri da doversi addizionare saranno scritti in colonne verticali in

modo che le unità del medesimo ordine si trovino in una stessa verticale; come si vede nell'esempio seguente

$$\begin{array}{r}
 4836 \\
 964 \\
 72 \\
 3493 \\
 28 \\
 659 \\
 \hline
 2986 \\
 \hline
 13038
 \end{array}$$

E tirata sotto di essi una linea orizzontale, per distinguere i numeri da doversi addizionare dalla loro somma, s'incomincerà dall'addizionare tutte le unità del 1° ordine, vale a dire la 1^a colonna verticale a destra. Ne risulterà la somma 38, di cui scriveremo 8 nel luogo delle unità, e porteremo le 3 decine sulla colonna seguente. Questa ci darà la somma 43, di cui scriveremo 3 nel luogo delle decine, riserbando le 4 centinaia per la colonna seguente; ed operando nello stesso modo sulle centinaia e le migliaia, otterremo la somma richiesta 13038¹.

¹ La legge di dover cominciare le addizioni parziali dalla colonna delle unità del 1° ordine, non è dettata dalla possibilità dell'operazione, ma dalla brevità del calcolo. Ed in vero poniamo che dovendo addizionare i seguenti numeri

$$\begin{array}{r}
 6328 \\
 764 \\
 86 \\
 \hline
 3329 \\
 9 \\
 17 \\
 18 \\
 27 \\
 \hline
 108 \\
 107 \\
 \hline
 10907
 \end{array}$$

noi dassimo cominciamento all'operazione dalle migliaia, la cui somma è 9. Passando all'addizione delle centinaia, la somma 17 dovremo scriverla ponendo 1 sotto a 9, poichè sono unità dello stesso ordine: e similmente scriveremo

CAPO QUARTO.

Sottrazione.

15. Per mezzo di questa operazione risolviamo il seguente problema: *data la somma di due numeri, e dato uno di essi, determinare l'altro* ¹. Il numero che si cerca, dicesi *eccesso, residuo o differenza*.

16. La sottrazione s'indica per mezzo del segno —, che si legge *meno*, situato tra la somma a sinistra e la parte nota a destra. Così $9 - 4$ significa che da 9 si vuol sottrarre 4.

la somma 18 delle decine e l'altra 27 delle unità. Indi comporremo queste somme parziali, procedendo sempre da sinistra a destra, ed avremo i numeri 108 e 107; i quali composti similmente ci daranno la somma 10907.

Dal quale esempio si rilevano chiaramente e la possibilità di cominciare l'addizione dalla 1^a colonna a sinistra, e la brevità di calcolo che risulta dal seguire il metodo inverso.

La stessa osservazione dovrà farsi ancora rispetto alla sottrazione ed alla moltiplicazione: ma la divisione e l'estrazione delle radici debbono cominciare necessariamente dalla sinistra, come dichiareremo a suo luogo.

1 La sottrazione è comunemente definita: *un'operazione di calcolo, che si propone di togliere un numero da un altro che non sia minore del primo*. Questa definizione, riguardata scientificamente, è inesatta; ed è inutile anche pei casi che in essa si comprendono.

È inesatta, poichè dovendo sottrarre $-b$ da a , l'algebra dimostra che il residuo sarà $a + b$. Abbiamo così che la quantità a riceve aumento in vece di diminuzione. E l'algebra, che non differisce dall'aritmetica per nuove forme di calcolo, ma per una speciale veduta sotto cui le considera, non può dare della sottrazione un'idea diversa da quella che ci offre la teoria del calcolo numerico. Or il risultamento $a + b$ che pone in difetto la comune definizione della sottrazione, corrisponde a capello a quella data nel testo, poichè $-b$ dovrà addizionarsi con $a + b$ per dare la somma a .

La comune definizione è ancora inutile, poichè trascurando la relazione che unisce la decomposizione di un numero alla legge della sua composizione, non può somministrare un metodo compintamente razionale per la determinazione del residuo. Quindi avviene che quando una cifra del numero somma si trova minore della cifra corrispondente nella parte nota, il metodo derivante dalla comune definizione si trova costretto di ricorrere al ripiego empirico di togliere in prestito un'unità dalla cifra dell'ordine immediatamente superiore.

17. Quando la sottrazione deve eseguirsi sopra numeri di una sola cifra, la pratica dell'addizione renderà facilissima la determinazione del residuo. Così volendo sottrarre 3 da 8, conosciamo immediatamente il residuo 5, perchè l'esercizio di addizione ci presenta questo numero come necessario al 3 per comporre la somma 8.

18. Sapendo determinare il residuo nel caso di numeri di una sola cifra, l'operazione non presenterà difficoltà veruna, quando i numeri dati avranno più cifre. Poniamo per esempio che sia 6895 la somma e 5463 la parte nota. Scriviamo il secondo numero sotto al primo, come qui a lato si vede.

6895	
5463	
	1432

Il numero 6895 essendo somma di 5463 e del numero 1432 che si cerca, ha dovuto esser composto addizionando le 3 unità della parte nota colle unità del residuo; e da quest'addizione sarà risultata la somma 5 — Similmente le 9 decine della somma si saranno ottenute, addizionando le 6 decine della parte nota con quelle del residuo; e nello stesso modo si sarà proceduto rispetto alle centinaia ed alle migliaia — In conseguenza basterà sottrarre 3 da 5, 6 da 9, 4 da 8, e 5 da 6, per ottenere le unità, decine, centinaia e migliaia del residuo 1432.

Tutto ciò suppone che ogni cifra della somma superi la cifra corrispondente della parte nota; ma per molte di esse potrebbe avvenire il contrario. Sia, per esempio, 7142 la somma data, e 2836 la parte nota — Le 2 unità del numero superiore dovrebbero esser somma delle 6 unità date e di quelle che si cercano pel residuo. Ma 6 aggiunto ad altro numero non poteva dare la somma 2; la somma dunque ha dovuto esser 12¹, di cui si è scritta la cifra 2, e la decina si è riportata alla colonna seguente: quindi sottrarremo 6 da 12, ed avremo la cifra 6 del residuo — Le 4 decine della somma per mezzo di questa restituzione fatta alle unità sono divenute 3, e perciò non vi saranno decine nel residuo, e scriveremo uno ze-

1 Dall'addizione di due numeri, ciascuno di una cifra, non può risultare unità di ordine superiore che sia maggiore di 1; poichè dalla somma di $9 + 9$, che sono le cifre massime, risulta 1 decina.

ro nel loro luogo — Similmente sarà stata 11 e non 1 la somma delle centinaia, di cui 8 essendo una parte, l'altra sarà 3 — Quindi le 7 migliaia si ridurranno a 6, da cui togliendo le 4 migliaia della parte nota si otterranno le 2 migliaia del residuo.

Può darsi facilmente che tra le cifre della somma vi fossero zeri; e sia per esempio 7000 la somma data, 3452 la parte nota — Nel luogo delle unità del numero superiore troviamo 0; dunque la somma delle unità è stata 10, di cui 2 essendo una parte, l'altra sarà 8 — Nel luogo delle decine troviamo un altro zero; dunque la somma è stata anche 10. Ma questo numero è risultato dall'addizione delle 5 decine della parte nota, di quelle del residuo, e della decina proveniente dalla somma delle unità. Quest'ultima decina essendo stata restituita, la somma delle decine è divenuta 9, di cui 5 essendo una parte, l'altra sarà 4 — Similmente diverrà 9 la somma delle centinaia, dalla quale togliendo le 4 centinaia della parte nota, si hanno le 5 centinaia del residuo. E per la stessa ragione le 7 migliaia della somma saranno divenute 6, dalle quali sottratte le 3 migliaia del numero inferiore, si ottengono le 3 migliaia del residuo.

19. Dall'analisi esposta in questo capo si rileva che facendo dipendere la determinazione del residuo dal modo con cui due numeri si compongono nella loro somma, si ha un metodo che riunisce in un solo tutti i casi della sottrazione, e li risolve con pari evidenza.

CAPO QUINTO.

Moltiplicazione.

20. Se i numeri da sottoporsi all'addizione fossero tutti eguali tra loro, come

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20,$$

allora al nome *addizione* potrebbe esser sostituito quello di *duplicazione*, *triplicazione* ec. secondochè saranno due, tre, ec. i numeri da doversi addizionare. Or per esprimere la stessa idea,

prescindendo dalla speciale quantità di volte che un numero dovrà essere ripetuto nell'addizione, si è adottato il vocabolo *moltiplicazione* — La moltiplicazione dunque è una *addizione di numeri eguali*.

21. Si è chiamato *moltiplicando* il numero che viene ripetuto più volte; *moltiplicatore* è quello ch' esprime questa quantità di volte; e si è dato il nome di *prodotto* al risultamento dell'operazione. Così nell'esempio precedente 4 è il *moltiplicando*, 5 è il *moltiplicatore*, e 20 il *prodotto* — Il moltiplicando poi ed il moltiplicatore, considerati insieme, vanno sotto il nome comune di *fattori*.

22. Poichè il prodotto nasce dalla ripetizione del moltiplicando dovrà essere necessariamente della stessa sua natura; quindi il prodotto sarà astratto o concreto, secondochè sarà astratto o concreto il moltiplicando. Il moltiplicatore poi indicando quantità di volte, non può essere che un numero astratto. È dunque impossibile che i due fattori di una moltiplicazione sianò ad un tempo concreti; e quando ciò avvenga nell'enunciato di un problema, meglio ponderando la quistione si troverà che almeno uno dei fattori diviene indipendente dalla sua speciale unità ed in conseguenza astratto ¹.

1 Poniamo per esempio che si volesse calcolare il prezzo di 12 canne di panno, a ragione di 7 ducati la canna. Noi diremmo allora, che una canna valendo 7 ducati, 12 canne dovranno valere 12 volte 7 ducati; vale a dire che per ottenere il valore richiesto, dovremmo moltiplicare 7 per 12. Or è chiara che il numero 12 non esprime più quantità di canne, ma indica in vece la quantità di volte che dovrà ripetersi il prezzo dell'unità di misura per ottenere il prezzo totale. Ed in vero se in vece di 12 canne a 7 ducati la canna, avessimo dovuto calcolare per 12 botti a 7 ducati la botte, o per 12 cantaia a 7 ducati il cantaio, avremmo avuto costantemente il prezzo totale in ducati 84. È dunque evidente che il numero 12 diviene astratto per la natura stessa della quistione.

Dal che si rileva che nella moltiplicazione di due fattori apparentemente concreti, noi possiamo determinare quale di essi sia propriamente il moltiplicando, ponendo mente alla natura del prodotto, il quale dev' essergli sempre omogeneo. Così nell'esempio qui arrecato, il moltiplicando sarà il prezzo di una canna, poichè il prodotto dev' esprimere ducati.

Talune volte però avviene che il prodotto si trova non essere omogeneo a veruno dei due fattori. La geometria, per esempio, insegna che il numero delle unità superficiali contenute in un dato rettangolo, si ottiene moltiplicando la

23. La moltiplicazione s'indica ponendo il segno $\times$ ovvero un punto tra i due fattori: così 7×4 ovvero 7.4 si legge *sette moltiplicato per quattro*.

24. I prodotti, che si ottengono combinando i numeri di una cifra a due in tutti i modi possibili, sono gli elementi di cui si compongono i prodotti dei numeri di più cifre. Quindi per eseguire facilmente ogni moltiplicazione da farsi, è necessaria una perfetta cognizione di questi prodotti elementari, che a tal uopo vengono ordinati, come qui appresso si vede, in una tavola, denominata *tavola di moltiplicazione o pitagorica*.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

base di esso rettangolo per la sua altezza; e la superficie del rettangolo non può essere omogenea nè alla base, nè all'altezza che sono due linee. In casi simili, rimontando ai principii donde deriva il metodo di determinazione del numero incognito, si troverà che i due fattori debbono necessariamente riguardarsi come astratti. Così nell'esempio apportato il metodo di determinare la superficie di un rettangolo mediante il prodotto della base per l'altezza è un corollario del teorema che dimostra essere i rettangoli nella ragione dei prodotti delle basi per le rispettive altezze; ed uno dei rettangoli divenendo unità di superficie, quando le sue dimensioni siano eguali all'unità lineare, sarà allora contenuto tante volte nell'altro rettangolo, per quante volte l'unità astratta è contenuta nel prodotto della base per l'altezza di quest'ultimo.

È facile comprendere l'ordinamento di questa tavola. Nella 1^a linea orizzontale sono situati i primi nove numeri; la 2^a linea contiene i prodotti dei nove numeri per 2; i prodotti degli stessi numeri per 3 stanno nella 3^a linea, per 4 nella 4^a, e così di seguito. Dimodochè volendo trovare nella tavola il prodotto di 7 per 6, bisognerà percorrere la linea orizzontale con cui comincia uno dei fattori, e sia per esempio il 7, fino ad incontrare la verticale a cui dà cominciamento l'altro fattore che sarà il 6; nell'intersezione delle due linee si troverà il prodotto 42.

25. Premessa la cognizione dei prodotti dei numeri di una cifra, poniamo che si volesse moltiplicare 5793 per 4. Poichè questo problema si riduce ad eseguire un'addizione in cui il numero 5793 sia scritto 4 volte, troveremo ripetute un egual numero di volte le 3 unità, le 9 decine, le 7 centinaia e le 5 migliaia. Basterà dunque, per ottenere il prodotto richiesto, che le unità, decine, centinaia ec. siano successivamente moltiplicate per 4, e che i prodotti parziali siano scritti colla stessa legge con cui si scrivono le somme parziali nell'addizione. Perciò dopo aver scritto il moltiplicatore 4 sotto al moltiplicando 5793, ed aver tirato una linea per separare i fattori dal loro prodotto, cominceremo l'operazione dicendo: 3 per 4 fanno 12, segneremo le 2 unità e serberemo la decina per aggiungerla al prodotto seguente; indi 9 per 4 fanno 36, più uno 37, scriveremo le 7 decine, serbando le 3 centinaia; e nello stesso modo progredendo fino all'ultima cifra a sinistra del moltiplicando, perverremo a comporre il richiesto prodotto 23172.

26. Passiamo ora al caso in cui anche il moltiplicatore è composto di più cifre; e sia 4657 da moltiplicarsi per 794. È chiaro che ripetere 794 volte il numero 4657 sarà lo stesso che ripeterlo prima 4 volte, poi 90 volte, in seguito 700 volte, ed in fine addizionare i tre prodotti. La moltiplicazione di 4657 per 4 non può presentare veruna difficoltà dietro ciò che si è detto nel numero precedente: restano soltanto a formarsi i pro-

5793

5793

5793

5793

23172

5793

4

23172

4657

794

18628

41913

32599

3697658

dotti per 90 e per 700. Or il moltiplicando sarà ripetuto 90 volte, se dopo averlo moltiplicato per 9 noi lo moltiplichiamo ancora per 10; vale a dire che mentre moltiplichiamo successivamente le sue diverse cifre per 9, diamo ai prodotti parziali, che ne risultano, un valore di sito dieci volte più grande. La qual cosa facilmente si ottiene, scrivendo sotto le decine del prodotto precedente quelle delle unità per 9, indi sotto le centinaia quello delle decine per 9, ec.; ossia che le cifre di $41913 = 4637 \times 9$ dovranno scriversi sotto quelle di 18628 in modo che le prime avanzino le seconde di un posto verso la sinistra. Similmente avremo il prodotto di 4637 per 700, moltiplicando il primo numero per 7, indi per 100: ciò che ottrremo scrivendo la prima cifra di questo prodotto sotto le centinaia dei prodotti precedenti. Dall'addizione poi dei tre prodotti parziali avremo la somma 3 697 658 che sarà il prodotto totale.

Da questo metodo di operazione risulta che se in mezzo alle cifre del moltiplicatore si trovino zeri, di questi non si avrà conto, badando però a conservare le dovute posizioni ai prodotti parziali risultanti dalla moltiplicazione del moltiplicando per le cifre significative del moltiplicatore. Poniamo, per esempio, che si dovesse moltiplicare 6852 per 4009. Dopo aver ottenuto 61668 prodotto di 6852 per 9, passeremo a moltiplicare 6852 per 4, e scriveremo la 1^a cifra 8 di questo prodotto sotto le migliaia del prodotto precedente, poichè dovevamo moltiplicare per 4000, e non per 4.

$$\begin{array}{r}
 6852 \\
 4009 \\
 \hline
 61668 \\
 27408 \\
 \hline
 27469668
 \end{array}$$

27. Quando i fattori di una moltiplicazione sono terminati alla destra da zeri, l'operazione non cade propriamente che sulle sole cifre significative. Sia, per esempio, 4700 da moltiplicarsi per 90. Facendo il prodotto di 47 per 9, abbiamo il numero 423, il quale sarà 1000 volte minore del vero. Imperocchè avendo trascurato i due zeri del moltiplicando, abbiamo operato realmente sul numero 47, il quale essendo 100 volte minore di 4700, ci ha dato un prodotto anche 100 volte minore del vero; ed in conseguenza la corre-

zione di questo primo errore richiederà che si aggiungano due zeri a destra di 423. Avremo così 42300, prodotto di 4700 per 9; ma il moltiplicatore doveva essere 90, e non già 9; si è dunque moltiplicato per un numero 10 volte più piccolo, e perciò altre tante volte minore del vero sarà il numero 42300. Laonde bisognerà aggiungere un altro zero a quest'ultimo numero, per avere l'esatto prodotto 423000 — Quindi se i due fattori finiscono con zeri, si farà il prodotto delle cifre significative, ed alla sua destra si scriveranno tanti zeri, quanti ne hanno i due fattori.

28. Avviene talvolta che si debbano eseguire moltiplicazioni, in cui vi sono più di due fattori, come sarebbe questa di $19 \times 13 \times 34$. In tal caso dopo aver moltiplicato 19 per 13 ed ottenuto il prodotto 247, si moltiplicherà questo numero per 34; e nello stesso modo si continuerebbe l'operazione, se vi fossero ancora degli altri fattori.

29. Eseguendo la moltiplicazione di due o più fattori, si osserva che il prodotto risulta costante, qualunque sia stato l'ordine seguito nella moltiplicazione dei fattori: così dalla moltiplicazione dei numeri 3, 4, 5, 7 si avrà sempre il prodotto 420, da qualunque di essi siasi dato cominciamento all'operazione. Per rinvenire la ragione di questo fatto, principiamo dal caso di due fattori, che supponiamo 4 e 3. Essendo $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, e $3 = 1 + 1 + 1$, nell'ipotesi di 4×3 avremo

		$1 + 1 + 1 + 1$
A		$1 + 1 + 1 + 1$
		$1 + 1 + 1 + 1$
		$1 + 1 + 1$
	B	$1 + 1 + 1$
		$1 + 1 + 1$
		$1 + 1 + 1$

Il prodotto si comporrà di tante unità quante se ne contengono in A. E se invece moltiplichiamo 3 per 4, il prodotto avrà tante unità, quante se ne contano in B. Ma il numero delle unità è lo stesso nei due quadri, di operazioni, poichè B differisce da A per la sola mutazione dell'ordinamento orizzontale in verticale; dunque necessariamente $4 \times 3 = 3 \times 4$. Lo stesso ragionamento potendosi ripetere in ogni altro caso, vediamo chiaramente la ragione per la quale si potrà sempre mutare il moltiplicando in moltiplicatore e viceversa, senza che il prodotto ne venga alterato.

Or supponiamo un numero di fattori maggiore di due, e sia per esempio

$$3 \times 7 \times 4.$$

Potendosi per la dimostrazione precedente passare il fattore 3 al secondo posto, avremo

$$3.7.4 = 7.3.4,$$

ed eseguendo la moltiplicazione di 7 per 3, si ottiene

$$7.3.4 = 21.4 = 4.21.$$

Or sciogliamo 21 nei suoi fattori 7 e 3, ed avremo

$$7.3.4 = 4.7.3;$$

$$\text{Ma} \quad 7.3.4 = 3.7.4;$$

dunque

$$3.7.4 = 4.7.3.$$

Dunque il fattore 3 ha potuto passare dal 1° al 2° posto, e dal 2° al 3° senza indurre cangiamento nel valore del prodotto. La stessa dimostrazione potendosi applicare a ciascuno degli altri due fattori nell'esempio recato, ed estendere poi ad un numero qualunque di fattori, si deve concludere che: *il valore di un prodotto deve necessariamente risultare indipendente dalla posizione rispettiva dei fattori.*

C A P O S E S T O.

Divisione.

30. Questa operazione di calcolo si propone la soluzione del seguente problema: *dato il prodotto di una moltiplicazione ed uno dei fattori, determinarne l'altro*¹. E poichè la prima idea che se

¹ Si definisce ancora la divisione: *quella operazione di calcolo per la quale si determina quante volte un numero è contenuto in un altro; ovvero che divide un numero in tante parti eguali, quante sono le unità contenute in un altro numero dato.* Le quali definizioni, non potendo convenire a tutti i

n'è avuta, è stata quella di dividere un numero in tante parti eguali, quante sono le unità contenute in un altro numero dato; perciò si è chiamato *dividendo* il prodotto da decomporsi, *divisore* il fattore noto, e *quoziente* il fattore incognito dal latino *quoties* (quante volte) perchè disegna la quantità di volte che il divisore è contenuto nel dividendo.

31. Il segno della divisione consiste in due punti situati tra il dividendo a sinistra ed il divisore a destra, ovvero in una lineetta orizzontale, sopra la quale va scritto il dividendo, e sotto di essa il divisore. Così $12:3$ ovvero $\frac{12}{3}$ si leggerà *dodici diviso per tre*.

32. Il caso più semplice della divisione è quello, in cui il divisore essendo di una cifra, il dividendo ne ha anche una, come

problemi che si risolvono per mezzo della divisione, sono da rigettarsi come inesatte. Poniamo per esempio che si voglia conoscere l'altezza di un parallelogrammo, di cui ci sono note la superficie e la base. Dai teoremi geometrici rileviamo che si avrà il valore dell'altezza del parallelogrammo dividendo il numero ch'esprime la superficie per quello che disegna la base. Or dire in questo caso che: *l'altezza si determina vedendo quante volte la superficie del parallelogrammo contiene la sua base*, ovvero *dividendo la superficie del parallelogrammo in tante parti eguali, quante sono le unità contenute nella base*: è lo stesso che voler enunciare colla prima definizione un concetto impossibile, e colla seconda un concetto falso. Ed inverso colla prima supponiamo la possibilità di un rapporto assegnabile tra due grandezze eterogenee, quali sono una superficie, che ha due dimensioni, ed una linea che ne ha una sola; supposizione evidentemente assurda. Dalla seconda definizione poi siamo necessariamente condotti ad ammettere che nell'altezza del parallelogrammo vi siano lunghezza e larghezza, poichè queste due dimensioni esistono nel tutto che abbiamo eredito spartire in tante porzioni eguali. Al contrario riguardando la divisione come il metodo inverso della moltiplicazione, sarà evidente che la determinazione dell'altezza si debba ottenere dividendo la superficie del parallelogrammo per la sua base, poichè la geometria ha dimostrato che il valore della sua superficie si ottiene moltiplicando la base per l'altezza.

Ed oltre all'esattezza logica, la definizione data nel testo è la sola che possa offrire un metodo razionale di operazione che dia un conto rigoroso dell'intero suo processo. Si potrebbe, per esempio, dare una ragione soddisfacente dell'impossibilità di cominciare l'operazione dalla destra del dividendo, senza considerare questo numero come prodotto del divisore pel quoziente?

8; 2; ovvero, ne ha due tali che quella a sinistra sia minore della cifra del divisore, come 32:4. Sì, nell'una che nell'altra ipotesi il quoziente avrà una cifra, che potremmo determinare per mezzo della tavola pitagorica, se la pratica stessa della moltiplicazione non la facesse conoscere immediatamente. Supponiamo, per esempio, che avessimo a dividere 56 per 8: l'uso della moltiplicazione ci farà subito avvertiti che ad 8 manca il fattore 7 per comporre il prodotto 56. Ma fingiamo che l'operatore mancasse di questa pratica, allora percorrendo nella tavola di moltiplicazione la linea verticale dei moltiplici del divisore 8, alla 7^a orizzontale incontrerebbe il prodotto 56; e così verrebbe a conoscere che 7 è appunto il fattore incognito — E se il dividendo fosse 58 in vece di 56, allora diremmo ancora esser 7 l'altro fattore, riguardando l'avanzo 2 come un residuo di operazione, del cui uso c'istruirà la teorica delle frazioni.

33. Passiamo ora al caso in cui il divisore essendo tuttavia di una cifra, il dividendo sia tale da far arguire l'esistenza di più cifre nel quoziente. Sia, per esempio, 30843 da dividersi per 9 — Riguardando 30843 come

30843		9
3260		3427

prodotto di 9 per un altro numero, è chiaro che la sua composizione avrà dovuto procedere nel seguente modo: si sono moltiplicate le unità del quoziente per 9, e del prodotto ottenuto si è scritta la cifra 3 delle unità che troviamo nel dividendo, e le decine, che ignoriamo, si sono aggiunte al prodotto di 9 per le decine del quoziente; di questo secondo prodotto, già aumentato del numero riportato dal prodotto precedente, si è scritta la cifra 4 che troviamo al posto delle decine nel dividendo, e la cifra delle centinaia si è portata al prodotto seguente. Nello stesso modo si è ottenuta la cifra 8 delle centinaia del dividendo; ed infine il numero 30, in cui si contiene il prodotto delle migliaia del quoziente per 9, più le migliaia che sono risultate dalla moltiplicazione delle centinaia del quoziente per lo stesso 9.

Or da questa composizione del dividendo si rileva che se le ritenute, messe in serbo nello scrivere le cifre 3, 4, 8, ec. del pro-

dotto, fossero facilmente determinabili, si potrebbe cominciare la decomposizione del dividendo dalla destra; ma poichè le ritenute dei prodotti parziali sono incognite, quest'ordine di scomposizione non può menarsi ad effetto.

Al contrario nel lato sinistro del dividendo troviamo che nel numero 30 (non potendo riguardare 3 come prodotto di 9 per un numero intero) deve trovarsi il prodotto di 9 per le migliaia del quoziente; perciò dividendo 30 per 9, il quoziente 3 disegnerà la 1^a cifra del quoziente.

Sottraendo da 30 il prodotto di 9 per 3, il residuo 3 sarà la ritenuta del prodotto di 9 per le centinaia del quoziente. Questo prodotto dovendo essere in centinaia, la cifra 8 del dividendo ne farà parte; e la seconda cifra 4 del quoziente ci sarà data dalla divisione di 38 per 9.

Similmente sottraendo da 38 il prodotto di 9 per 4, ed immaginando che a destra del residuo 2 scendesse la cifra 4 del dividendo, troveremo in 24 il prodotto di 9 per la 3^a cifra del quoziente, che sarà 2.

In fine tolto da 24 il prodotto di 9 per 2, il residuo 6 coll'ultima cifra 3 del dividendo comporrà l'ultimo prodotto parziale da decomporci. Divideremo dunque 63 per 9, ed avremo l'esatto quoziente 7; e così il fattore richiesto sarà 3427.

In questo esempio si è ottenuto 0 per residuo dell'operazione, perchè l'ultimo dividendo parziale si è trovato un prodotto esatto del divisore 9 per un altro numero, ma se quest'ultimo dividendo fosse stato maggiore di 63 e minore di 72, avremmo avuto il quoziente 7 con un residuo, che per ora riguarderemo come una parte aggiunta al prodotto del divisore per l'intero quoziente.

34. Nell'eseguire una simile divisione talvolta avviene che dopo aver definito i limiti di un certo prodotto parziale, troviamo un numero minore del divisore. Allora è evidente che la cifra di quel dato ordine manca nel quoziente, e perciò nel suo luogo porremo uno zero. Così dividendo 215395 per 5, si trova per 3^o dividendo parziale il numero 3 che dovrebbe con-

$$\begin{array}{r|l} 215395 & 5 \\ \hline 1040 & 43079 \end{array}$$

tenere il prodotto di 5 per le centinaia del quoziente; ma poichè 3 non si può riguardare come prodotto di 5 per un numero intero, diremo non esservi centinaia nel quoziente; nel loro luogo porremo uno zero, e riguarderemo il 3 come ritenuta della moltiplicazione di 5 per le decine del quoziente.

35. Merita ancora un esame particolare il caso in cui dividendo e divisore hanno più cifre, ed il quoziente ne ha una sola. Sia, per esempio, 59968 da dividersi per 7496. Se il quoziente in questo caso potesse avere più cifre, e supponiamolo il numero più piccolo di questa specie, vale a dire 10; allora il divisore moltiplicato per 10, dovrebbe dare un prodotto eguale o almeno minore di 59968: si ottiene in vece un numero maggiore, qual'è 74960; dunque il quoziente dovrà essere minore di 10, ed in conseguenza di una cifra. Ed in generale, conosceremo che il quoziente debba avere una sola cifra nella divisione di due numeri di più cifre, se immaginando, apposto uno zero alla destra del divisore, ne risulta un numero più grande del dividendo.

Per determinare la cifra del quoziente nel caso proposto osserviamo che 59968, riguardandosi come prodotto di 7496 per un numero di una sola cifra, ha dovuto essere composto nel seguente modo: le 6 unità del divisore moltiplicate per la cifra del quoziente, han dato un prodotto, di cui si è scritta la cifra 8 delle unità, e le decine si sono portate sul prodotto delle 9 decine del divisore per la cifra del quoziente. Nello stesso modo procedendo, si sono ottenute successivamente le cifre 6 e 9 del dividendo; ed in fine il 59, che si compone del prodotto della cifra del quoziente per le 7 migliaia del divisore, più le migliaia riportate dal prodotto precedente. In conseguenza dividendo 59 per 7, la cifra 8 che ne risulta, dovrà rappresentare il quoziente richiesto, ed il residuo 3 sarà la ritenuta del prodotto di 8 per le 4 centinaia del divisore. Questo prodotto dovrà dunque esser contenuto nelle 39 centinaia che restano nel dividendo; e poichè 32, prodotto di 8 per 4, si contiene in 39, perciò la cifra 8 data dalla prima divisione, soddisfa a questo secondo prodotto par-

$$\begin{array}{r} 59968 \quad | \quad 7496 \\ 3740 \quad \quad 8 \end{array}$$

ziale. Similmente nelle 76 decime che restano del dividendo, si contiene il prodotto 72 delle 9 decime del divisore per la cifra 8 del quoziente; come ancora nelle 48 unità, che formano l'ultimo residuo del dividendo, si contiene esattamente il prodotto del quoziente per le 6 unità del divisore. Quindi la cifra 8, avendo soddisfatto a tutti i prodotti parziali, di cui s'immagina composto il dividendo, deve riguardarsi come il vero quoziente.

Nell'esempio, che or abbiamo analizzato, la cifra 8 determinata dalla prima divisione, ha soddisfatto a tutti i prodotti parziali; ma ciò non è costante. Poniamo per esempio la divisione di 19313 per 2759, il cui quoziente è ancora di una cifra. Cominciando l'operazione col dividere 19 per 2 abbiamo il

$$\begin{array}{r|l} 19313 & 2759 \\ 5460 & 7 \end{array}$$

quoziente 9 ed il residuo 1. Se 9 fosse il vero quoziente, moltiplicandolo per le 7 centinaia del divisore il prodotto 63 dovrebbe potersi sottrarre dalle 13 centinaia che avanzerebbero nel dividendo; ma questa sottrazione essendo impossibile, è chiaro che il vero quoziente sarà minore di 9. Lo supporremo dunque eguale ad 8, ma incontreremo un'altra sottrazione impossibile: finalmente ponendolo eguale a 7, troveremo che questa cifra rappresenta il vero quoziente.

La ragione della diversità di risultamenti rinvenuti nei due esempi, sta tutta in una legge di moltiplicazione, la quale va formolata nel seguente modo: *le unità di ordine superiore, che risultano dalla moltiplicazione di due numeri, avranno sempre un valore proprio, minore di quello di ciascuno dei fattori.* Così dal prodotto di 7 per 9 risultano 6 decime, ed il valore proprio di questa cifra è minore sì del 7 che del 9. — Ciò posto, nel primo esempio di divisione il dividendo 59968, riguardandosi come prodotto di 7496 X 8, ha dovuto risultare dai prodotti 6 X 8, 9 X 8, 4 X 8, 7 X 8, uniti insieme col portare al prodotto seguente le unità di ordine superiore ottenute dalla moltiplicazione precedenti. Quindi dopo aver avuto le cifre 8, 6 e 9 del dividendo mediante la moltiplicazione per 8 delle cifre 6, 9 e 4 del divisore, si è passato alla moltiplicazione dell'ultima cifra 7 di esso diviso-

re per la cifra 8 del quoziente, ed al prodotto 56 si è aggiunta la ritenuta 3 del prodotto precedente 8×4 . Or questa cifra 3, minore della cifra 7 perchè doveva essere minore della cifra 4, non ha potuto colla sua addizione al 56 rendere questo numero capace di contenere il 7 una volta di più; e perciò il quoziente 8, dato dalla 1^a divisione parziale, ha soddisfatto a tutte le altre condizioni, e si è trovato esatto — Al contrario nel 2° esempio, vale a dire 19313: 2759, la composizione del dividendo avrà richiesto che dopo le moltiplicazioni delle cifre 9, 5 e 7 del divisore per la cifra 7 del quoziente, si sia fatta quella dell'ultima cifra 2 per lo stesso quoziente 7, e che al prodotto 14 si sia aggiunta la ritenuta 5, data dalla moltiplicazione precedente. Or la cifra di questa ritenuta, dovendo essere minore delle cifre 7 sì del moltiplicando che del moltiplicatore, non per ciò doveva essere minore dell'ultima cifra 2 del divisore; essa è in vece maggiore e la contiene due volte. Donde è avvenuto che dividendo 19 per 2 si è trovato un quoziente di due unità maggiore del vero.

Ed in generale: *nel caso della divisione di due numeri di più cifre con un quoziente di una sola, il valore di quest'ultimo è ordinariamente ben definito dalla 4^a divisione parziale, quando la 1^a cifra del divisore supera di molto la 2^a; ma se in vece questa supera di molto la prima, il quoziente determinato dalla 1^a divisione parziale suol essere maggiore del vero.*

36. Nei due esempli, che abbiamo tolto ad esaminare in questo 2° caso di divisione, i residui delle divisioni parziali, eseguite per assicurarci dell'esattezza della cifra del quoziente, sono risultati tutti minori di questa cifra. Nè poteva avvenire diversamente, poichè quei residui erano le ritenute dei prodotti parziali dond'era risultato il dividendo, e dovevano perciò riuscire minori della cifra del quoziente, ch'era stato uno dei fattori. Ma se il dividendo risultasse dalla somma di un moltiplice esatto del divisore, e di un altro numero che la divisione presenterà sotto forma di resto, allora la legge dei residui sarebbe alterata, e se ne troverebbero di più grandi o di eguali alla cifra del quoziente. Laonde se nel mettere ad esperimento la cifra data dalla 1^a divisione

parziale, od anche in questa medesima divisione, si avesse un residuo maggiore o eguale alla cifra del quoziente, si avrebbe allora un criterio dell'esattezza della cifra e dell'esistenza di un resto di divisione. Così volendo dividere

$$\begin{array}{r|l} 8075243 & 956371 \\ 8075243 & \\ \hline & 8 \\ & 424275 \end{array}$$

8. È dunque 8 il vero quoziente, e la divisione darà un resto, come il fatto del calcolo riferma.

Quindi deriva la seguente regola assai utile nella pratica: *dovendo verificare la cifra del quoziente di due numeri di più cifre, è necessario spingere la prova fino ad ottenere un resto maggiore o almeno eguale alla cifra che si sperimenta.*

37. I casi di divisione, finora esaminati, costituiscono le operazioni elementari, di cui si compone il metodo di soluzione, quando dividendo, divisore e quoziente sono di più cifre. Sia, per esempio, 187384 da dividersi per 472. Riguardando sempre il dividendo come prodotto del divisore pel quoziente, è chiaro che la 1^a cifra a sinistra del quoziente nella sua moltiplicazione pel divisore ha dovuto dare al dividendo almeno 472 unità del suo ordine; in conseguenza per determinare quest'ordine massimo nelle cifre del quoziente, basterà separare alla sinistra del dividendo tante cifre, quante se ne richieggono per comporre un numero capace di contenere il divisore. Così nell'esempio che trattiamo, le cifre da separarsi son quattro, e la 1^a divisione parziale cadrà su i numeri 1873 e 472. Ma l'ultima cifra del 1873 rappresenta centinaia; questo sarà dunque l'ordine massimo nelle cifre del quoziente, il quale risulterà composto di centinaia, decine ed unità.

Dividendo 1873 per 472, si ha il quoziente 3 col residuo 457. Questo residuo dovremo riguardarlo come ritenuta del prodotto di 472 per le decine del quoziente; e poichè le decine debbono costituire l'ordine minimo delle cifre di questo prodotto, così la

$$\begin{array}{r|l} 187384 & 472 \\ 1416 & 397 \\ \hline & 4578 \\ & 4248 \\ \hline & 3304 \\ & 3304 \\ \hline & 0 \end{array}$$

cifra 8 del dividendo ne farà parte, e perciò la faremo discendere a lato del residuo 457 — Divideremo allora 4578 per 472; ed avremo la cifra 9 al quoziente, ed il resto 330 — Similmente opereremo con questo residuo e colla cifra 4 del dividendo, ed otterremo l'ultima cifra del quoziente.

38. Il metodo di scrivere sotto a ciascun dividendo parziale il prodotto del divisore per la corrispondente cifra del quoziente e poi farne la sottrazione, è troppo lungo per esser commendato nella pratica. Quello che viene adoperato dai più periti calcolatori, consiste in sottrarre i prodotti parziali della cifra del quoziente per ciascuna cifra del divisore, a misura che si compongono per mezzo della moltiplicazione. Questo metodo, a dir vero, condurrebbe sovente a dover sottrarre una cifra maggiore da un'altra minore, ma una tal difficoltà è facilmente eliminata per mezzo del seguente principio: *la differenza di due numeri rimane inalterata, quando essi vengono aumentati o diminuiti di una stessa quantità* — Un esempio, e sia quello stesso esaminato nel n° precedente, metterà in tutto il suo lume la facilità e speditezza di questo metodo. Dopo aver determinato il quoziente 3 di 1873 diviso per 472, diremo: *tre* $187384 \overline{) 472}$
per due, sei; da tredici, sette: poichè non po- $4578 \quad 397$
 tendo sottrarre 6 da 3, abbiamo aumentato 3304
 questa cifra di una decina, ed abbiamo detto 000
tredici. E dovendosi aggiungere anche al sottraendo questa decina aggiunta al minuendo, affinché il residuo si rimanga inalterato; così nel passare alla moltiplicazione della 2^a cifra 7 del divisore per la stessa cifra 3 del quoziente, diremo: *tre per sette, ventuno; ed uno, ventidue.* Qui avremmo una sottrazione possibile, poichè dovremmo sottrarre la cifra 2 di questo prodotto dalla cifra 7 del dividendo; ma per conservare l'uniformità del metodo, necessaria per divenire spediti nell'operare, diremo, dopo aver ottenuto il prodotto 22: *ventidue da ventisette dà cinque* — Ecco aumentata la cifra 7 di 2 decime del suo ordine; aumenteremo di altrettanto la cifra dello stesso ordine del prodotto seguente, e diremo: *tre per quattro, dodici; più due,*

quattordici; da diciotto, quattro — Così mediante una sola operazione abbiamo ottenuto il residuo 457. Al suo lato destro faremo scendere la cifra 8 del dividendo; ed è facile comprendere come l'operazione debba continuarsi fino ad ottenere l'ultima cifra del quoziente.

39. Rispetto a questo caso generale di divisione cadono in acconcio due osservazioni — 1^a Se nel corso dell'operazione si ottenesse qualche dividendo parziale minore del divisore; allora saremmo certi che quell'ordine di unità manca nel quoziente, e nel suo luogo porremo uno zero. Così nell'esempio qui alato il residuo 75 della 1^a divisione, aumentato della cifra 2 del dividendo, è tuttavia minore di 836; donde concluderemo non esservi decine nel quoziente, e porremo uno zero nel loro posto.

— 2^a Se dividendo e divisore siano terminati da zeri, se ne potrà togliere un egual numero all'uno ed all'altro senza che il quoziente resti alterato. Così poniamo dover dividere 12000 per 400. Il 12000 essendo stato composto moltiplicando 4 pel quoziente, ed aggiungendo due zeri alla destra del prodotto; questi due zeri, estranei al quoziente, si potranno togliere dal dividendo, ed il quoziente di 12000:400 sarà necessariamente lo stesso che quello di 120:4.

$$\begin{array}{r|l} 341924 & 836 \\ 7524 & 409 \\ \hline & 000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 12000 & 400 \\ \hline & 30 \end{array}$$

CAPO SETTIMO.

Numeri primi. Caratteri di divisibilità. Massimo divisore comune. Minimo dividendo comune.

40. Un numero divisibile soltanto per se medesimo e per l'unità, dicesi *numero primo*: tali sono 2, 3, 5, 7, 11, ec. — E più

1 Eccetto 2, tutti gli altri numeri primi debbono essere dispari. Ma la proposizione inversa, *tutti i numeri dispari son primi*, è falsa, poichè 21, 35, 49, ec. sono dispari, ma non primi. La classe dei numeri dispari è dunque più estesa che quella dei numeri primi.

numeri, senza essere assolutamente primi, si dicono *primi tra loro* quando non hanno alcun fattore comune, come 10, 21, 121; essendo il primo composto da 2×5 , il secondo da 3×7 ed il terzo da 11×11 .

41. Un metodo semplicissimo per determinare i numeri primi fino ad un certo limite della serie naturale, è quello del così detto *crivello di Eratostene* dal nome del geometra greco a cui n'è dovuta l'invenzione. Poniamo che si vogliano determinare i numeri primi compresi tra 1 e 200. Poichè i numeri pari non sono primi scriveremo tutta la serie dei dispari contenuti tra i dati limiti, comprendendovi però il 2

1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199.

Poichè questi numeri aumentano di 2 in 2, così cominciando a numerare la serie da 3, i termini seguenti saranno $3+2$, $3+2.2$, $3+3.2$, e quest'ultimo numero sarà divisibile per 3. Quindi se dal numero 5 contiamo di 3 in 3, troveremo 9, 15, 21, ec. che sono tutti multipli di 3, ed in conseguenza non primi: segnere-
mo allora ciascuno di questi numeri con una lineetta. Similmente segnando di 5 in 5 cominciando a numerare da 7; di 7 in 7 cominciando da 9; di 11 in 11 cominciando da 13; e finalmente di 13 in 13 cominciando da 15; avremo esclusi dalla serie tutti i numeri non primi; quelli che resteranno saranno i primi contenuti tra 1 e 200; vale a dire

1, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

1 Quando si vogliono determinare i numeri primi estesi fino ad un certo limite della serie naturale, basterà limitare le prove fino a quel numero primo che moltiplicato per se stesso dia il prodotto massimo contenuto tra i limiti dati: così nell'esempio del testo, abbiamo $13 \times 13 = 169$, e $17 \times 17 = 289$; dunque bisogna arrestarsi alla prova del 13 — La ragione di questa regola è semplicissima. Volendo percorrere la serie di 17 in 17 resterebbero segnati

42. Potendosi ogni numero *non primo* riguardare come prodotto di altri numeri, cerchiamo in qual modo si possa determinare il sistema di numeri primi dalla cui moltiplicazione debba risultare un numero dato. Sia 360 il numero dato. Ponendo a pruova di divisore il 2, che dopo 1 è il più semplice dei numeri primi, abbiamo i quozienti successivi 180, 90 e 45. Quest'ultimo non è divisibile per 2, ma lo è per 3, che ci dà successivamente i quozienti 15 e 5; e siamo così pervenuti ad un numero primo, che diviso per se stesso ci dà il quoziente 1 — Nello stesso modo operando sul numero 385, si otterranno i divisori 5, 7 ed 11.

360	2	385	5
180	2	77	7
90	2	11	11
45	3	1	
15	3		
5	5		
1			

Or essendo il dividendo eguale al prodotto del divisore pel quoziente, avremo pei due esempli qui sopra trattati

$$360 = 2.180 = 2.2.90 = 2.2.2.45 = 2.2.2.3.15 = 2.2.2.3.3.5,$$

$$385 = 5.77 = 5.7.11 ;$$

vale a dire che: *ogni numero è eguale al prodotto dei suoi divisori primi.*

43. La definizione della divisione, data nel n° 30, non esprime che l'obbietto di questa operazione di calcolo; ma l'intima sua natura, vale a dire ciò che la costituisce essenzialmente, non poteva esser dichiarata senza la nozione dei numeri primi — Poniamo che si divida 360 per 24, e che determinato il quoziente 15, si decomponga ciascuno di questi tre numeri nei suoi fattori primi. Si avranno allora

$$360 = 2.2.2.3.3.5, \quad 24 = 2.2.2.3, \quad 15 = 3.5.$$

E poichè si ha la relazione $360 = 24 \times 15$, i fattori primi del 360 dovranno esser ripartiti tra 24 e 15, dimodochè 24 avendo-

tutti i numeri rappresentati dai prodotti $3 \times 17, 5 \times 17, 7 \times 17, \dots, 13 \times 17$; i quali tutti sono stati già segnati nel percorrere la serie di 3 in 3, di 5 in 5, di 13 in 13. Il primo multiplice di 17 che resterebbe a segnarsi sarebbe dunque quello di 17×17 , il quale eccede il numero 200.

ne taluni, 15 ne conterrà i rimanenti; e perciò onde avere i fattori di quest'ultimo, basterà sopprimere tra i fattori del 360 quelli di 24; i fattori residui dovranno comporre il quoziente 15. *Laonde: la divisione consiste in sopprimere dal dividendo i fattori del divisore. Dalla quale definizione poi deriva che: un numero sarà divisibile per un altro, quando ne contenga tutti i fattori primi, e viceversa: se un numero contenga tutti i fattori primi di un altro, la divisione del primo pel secondo dovrà riuscire necessariamente esatta. Perciò*

— 1° Combinando in tutti i modi possibili i fattori primi di un dato numero, si avrà il sistema completo dei suoi divisori — Poniamo per esempio di voler determinare tutti i divisori di 360 = 2.2.2.3.3.5. Cominciamo dal combinare separatamente ed in tutti i modi possibili i fattori 2 e 3, ed avremo

$$\begin{array}{l} 2, 2 \times 2, 2 \times 2 \times 2, \text{ ossia } 2, 4, 8 \\ 3, 3 \times 3, \text{ ossia } 3, 9. \end{array}$$

Or per avere i divisori risultanti da questi due fattori primi 2 e 3, bisognerebbe moltiplicare ciascun numero della serie 2, 4, 8 per ciascuno dell'altra serie 3, 9; ma così facendo, non si avrebbero più isolatamente i divisori 2, 3, 4, 8, 9. La riproduzione di questi numeri per mezzo della stessa operazione, colla quale dovremo comporre le combinazioni di un divisore primo con quelle dell'altro, richiede che ognuna delle due serie precedenti cominci da 1, divisore di ogni numero. Così moltiplicando nel modo indicato le due serie

$$(1, 2, 4, 8)(1, 3, 9)$$

ed ordinandone i prodotti, avremo la serie di divisori

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Per ottenere poi l'intero sistema dei divisori di 360, bisogna ai termini di questa serie aggiungere quelli che risulteranno dalla moltiplicazione di tutti i suoi termini per 5, vale a dire che il prodotto (1, 2, 4, 8)(1, 3, 9) dovrà essere moltiplicato per (1, 5).

In tal modo si avrà il sistema richiesto

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 40,
~~45~~ 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Dunque per ottenere il sistema completo dei divisori di un dato numero, bisogna primieramente decomporlo nei suoi fattori primi; indi far tutte le combinazioni possibili di ciascun fattore che si è trovato ripetuto più volte; poi ordinare queste combinazioni in tante serie, coll'unità alla testa, per quanti sono i diversi fattori primi; ed in fine moltiplicare ciascun termine della 1^a serie per ciascuno della 2^a, ciascuno di questi prodotti per ogni termine della 3^a serie; e così continuare fino all'ultimo: i prodotti risultanti dall'ultima moltiplicazione saranno i divisori richiesti.

— 2° *Un numero sarà divisibile per 2, quando sia terminato da una delle seguenti cifre, 0, 2, 4, 6, 8; e lo sarà per 5, quando finisca con 0, o con 5* — Ed in vero i fattori 2 e 5 si troveranno nelle decine, centinaia, migliaia ec. del numero proposto, da qualunque cifra siano rappresentate; perciò saranno tutte divisibili sì per 2 che per 5. La quistione dunque cade per intero sulle unità del 1° ordine, le quali mancando saranno sostituite da un zero; ed allora il numero non avendo ordine inferiore alle decine, sarà necessariamente divisibile per 2 e per 5, poichè conterrà l'uno e l'altro fattore. Se poi le unità di 1° ordine esistono, è evidente che esse debbano essere rappresentate da una delle cifre 2, 4, 6, 8 perchè il numero sia divisibile per 2; e da 5 nel caso della divisibilità per 5.

— 3° *Un numero sarà divisibile per 4, 8, ec. quando le due, tre ec. ultime cifre a destra rappresentino un numero divisibile per 4, 8, ec. E lo sarà per 25, 125, ec. quando le due, tre ec. ultime cifre a destra compongano un numero divisibile per 25, 125, ec.* — Essendo $100 = 10 \times 10 = 2.5.2.5$, ogni centinaio conterrà due volte il fattore 2 e due volte il 5; ogni centinaio dunque sarà divisibile sì per 4 che per 25. Il dubbio della divisione caderà dunque sulle decine ed unità; e perciò un numero sarà divisibile per 4 se le due ultime cifre formano un moltiplice di

4, e lo sarà per 5, se esse formano un multiplice di 5. Così 379132 sarà divisibile per 4, perchè lo è 32; e 177975 è divisibile per 25, perchè 75 è multiplice di 25 — Nello stesso modo si dimostra la regola della divisibilità per 8 o per 125.

— 4° *Un numero è divisibile per 9, quando la somma delle sue cifre è multiplice di 9* — Dividendo per 9 i numeri della serie decimale 1, 10, 100, 1000, cc. abbiamo costantemente una unità per residuo. Or sia 37854 il numero dato: poichè ogni unità divisa per 9 dà per residuo 1, le 4 unità daranno il residuo 4; similmente dalle 5 decine si avrà il residuo di 5 unità, dalle 8 centinaia quello di 8 unità cc. Quindi il numero dato si può immaginare composto di due parti, l'una multiplice di 9, e l'altra risultante dalla somma dei residui, la quale è $4+5+8+7+3$, vale a dire la somma delle sue cifre. Perciò se questa somma è divisibile per 9, è chiaro che debba esserlo anche il numero proposto. Or la somma $4+5+8+7+3=27$ è multiplice di 9; dunque 37854 è divisibile per 9, come il fatto della divisione riferma — Nello stesso modo si dimostra ancora che: *un numero è divisibile per 3, quando la somma delle cifre è multiplice di 3* — Quindi ogni numero divisibile per 9, lo è anche per 3.

— 5° Quando si hanno i caratteri di divisibilità per più numeri dati, quello relativo al loro prodotto si otterrà componendo i caratteri dei fattori. Così essendo $6=2.3$, un numero sarà divisibile per 6, quando riunirà le condizioni di divisibilità per 2 e per 3, vale a dire quando la somma delle sue cifre sia multiplice di 3, e nel tempo stesso il numero sia terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8. Similmente un numero sarà divisibile per $36=9.4$, se la somma delle sue cifre sia multiplice di 9, e le due ultime cifre a destra facciano un multiplice di 4.

1 Ogni numero intero è compreso nell'espressione generale

$$a10^n + b10^{n-1} + c10^{n-2} + \dots + p10 + q10 + u,$$

nella quale $a, b, c, \dots, p, q, u$ rappresentano i valori propri delle sue cifre. E perchè un numero sotto questa forma generale ammetta un divisore primo d , egli è necessario che sia soddisfatta una delle seguenti condizioni — 1° Che d

44. Abbiamo esposto nel n° 43 in qual modo si possono trovare tutti i divisori di un dato numero; ed in conseguenza componendo tutti i divisori di due numeri dati, potremmo conoscere se

divida ciascuno dei valori $a, b, c, \dots, p, q, u - 2^a$ Che d sia divisore di 10 ed u , o di 10^a e $q10 + u$; ed in generale di 10^n e del numero rappresentato dalle n cifre che terminano a destra il numero dato — 3^a Che conoscendosi il periodo $r, r', r'', \dots, r^n$ dei residui di 1, 10, 100, ..., 10^n divisi per d , abbia luogo l'equazione di condizione

$$arn + bra^{-1} + crn^{-2} + \dots pr'' + qr' + u = md.$$

Così la divisibilità di 4826, 6280, ec. per 2, quella di 3963, 9636, ec. per 3 risultano dalla 1^a condizione — Si rapportano alla 2^a i caratteri di divisibilità per 2, $2^a, \dots, 2^n$, e per 5, $5^a, \dots, 5^n$ — Alla 3^a condizione finalmente appartengono i caratteri di divisibilità per qualsivoglia numero primo diverso da 2 e 3, e che non sia divisore di ogni cifra del numero dato. Ne abbiamo veduto un caso speciale nella divisibilità per 3 e 9: facciamone ancora un'applicazione cercando le condizioni di divisibilità per 7 ed 11.

La serie 1, 10, $10^2, \dots, 10^n$ divisa per 7 dà il periodo di residui 1, 3, 2, 6, 4, 5: quindi perchè il numero 48251 sia divisibile per 7, è d'uopo che

$$1.1 + 5.3 + 2.2 + 8.6 + 4.4$$

sia un multiplice di 7; la qual cosa essendo soddisfatta, 48251 è divisibile per 7. Or essendo $6 \equiv 7 - 1$, $4 \equiv 7 - 3$, $5 \equiv 7 - 2$; ai prodotti 8×6 e 4×4 potremo sostituire $8(7-1) \equiv 8.7 - 8.1$ e $4(7-3) \equiv 4.7 - 4.3$. Quindi la condizione di divisibilità per 7 del numero proposto sarà espressa da

$$1.1 + 5.3 + 2.2 + 8.7 - 8.1 + 4.7 - 4.3,$$

dalla quale sopprimendo i termini multipli di 7, avremo

$$1.1 + 5.3 + 2.2 - 8.1 - 4.3;$$

vale a dire che per determinare se un numero sia divisibile per 7, bisogna dividerne le cifre in ternari; indi moltiplicare per 1 la prima cifra di ogni ternario, per 3 la seconda e per 2 la terza; addizionare i prodotti ottenuti dai ternari di posto impari; dalla loro somma sottrarre quella data dai ternari di posto pari; la differenza, dopo averne tolto il massimo multiplice di 7 che vi è contenuto, sarà il residuo della divisione per 7. Così nell'esempio recato abbiamo $1.1 + 5.3 + 2.2 \equiv 20$, e $8.1 + 4.3 \equiv 20$: il residuo di 48251 diviso per 7 sarà $20 - 20 \equiv 0$.

essi ne avessero di comune, e tra questi quale fosse il più grande. Ma questa ricerca, di grande importanza nel calcolo delle frazioni, può eseguirsi con un metodo più spedito.

Siano 9702 e 2646 i due numeri di cui si cerca il *massimo divisore comune*. Non potendo il numero richiesto esser più grande di 2646, noi cominceremo dal supporlo eguale a quest'ultimo; ed in questa ipotesi divideremo 9702 per 2646. Ma fatta la divisione, abbiamo il quoziente 3 col residuo 1764; e perciò 2646 non è il massimo divisore comune. Intanto per la teorica della divisione abbiamo

$$9702 = 2646 \times 3 + 1764.$$

Ed indicando con D ogni divisore comune a 9702 e 2646, avremo evidentemente

$$\frac{9702}{D} = \frac{2646 \times 3}{D} + \frac{1764}{D};$$

e poichè D è divisore di 9702 e 2646, ed in conseguenza di 2646×3 ; saranno esatti i quozienti $\frac{9702}{D}$ e $\frac{2646 \times 3}{D}$. Ma 2646×3 è una parte di 9702; e D dividendo esattamente il tutto 9702 e la parte 2646×3 , dovrà dividere esattamente anche l'altra parte 1764. Quindi 9702 e 2646 da un lato, 2646 e 1764 dall'altro dovranno avere il medesimo sistema di divisori comuni;

La stessa serie 1, 10, ..., 10_n divisa per 11 dà il periodo 1 e 10; quindi la condizione di divisibilità per 11 del numero 487927 sarà espressa da

$$7 + 2.10 + 9 + 7.10 + 8 + 4.10;$$

e sostituendo a 10 l'equivalente 11 - 1, avremo

$$7 + 2.11 - 2 + 9 + 7.11 - 7 + 8 + 4.11 - 4,$$

dalla quale tolti i termini moltiplici di 11, rimane

$$7 + 9 + 8 - (2 + 7 + 4);$$

vale a dire che per determinare se un numero sia divisibile per 11, bisognerà addizionare tutte le cifre di posto impari, sottrarne la somma di quelle di posto pari; la differenza rappresenterà il residuo del numero diviso per 11, dopo averne tolti i moltiplici di quest'ultimo che vi potrebbero esser contenuti. Così dall'ultima espressione abbiamo $7 + 9 + 8 = 24$, $2 + 7 + 4 = 13$, $24 - 13 = 11$: il numero proposto è dunque divisibile per 11.

e perciò cercare il massimo divisore comune tra 9702 e 2646 sarà lo stesso che cercarlo tra 2646 e 1764.

Il massimo comune divisore di questi due ultimi numeri non potendo superare 1764, noi divideremo il primo pel secondo nell'ipotesi che 1764 fosse il numero richiesto, ed avremo il quoziente 1 col residuo 882. E ragionando come sopra, troveremo che 2646 e 1764 da un lato, e 1764 e 882 dall'altro dovranno avere il medesimo sistema di divisori comuni; quindi il massimo divisore richiesto potremo cercarlo tra 1764 e 882. Lo supporremo ancora eguale al minore dei due numeri; ed il quoziente esatto 2, che si ottiene dalla divisione del primo numero pel secondo, ci dimostra che realmente 882 è il massimo divisore comune di 1764 ed 882; ed in conseguenza di 2646 e 1764, e di 9702 e 2646.

Dunque: per ottenere il massimo comune divisore di due numeri dati, bisognerà dividere il maggiore di essi pel minore; questo pel 1° residuo; il 1° pel 2° residuo, ec., finchè non si abbia per residuo zero; l'ultimo divisore sarà il massimo comune divisore richiesto — Per comodità di calcolo l'operazione si ordina come qui appresso.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3 \quad 1 \quad 2 \\
 9702 & 2646 \mid 1764 \mid 882 \mid \\
 1764 & 882 \mid 000 \mid
 \end{array}$$

45. Se in vece di due fossero più i numeri dati, di cui si cerca il massimo comune divisore, allora col metodo qui sopra esposto si cercherà questo numero per due qualunque di essi; e se il divisore ottenuto divida esattamente gli altri numeri dati, sarà desso il massimo divisore richiesto. Così poniamo che si volesse il massimo comune divisore dei numeri 1408, 1152 e 512: cercato questo numero per 1408 e 1152, si troverà essere 128: e poichè esso divide esattamente anche 512, è 128 il massimo divisore dei numeri 1408, 1152 e 512.

Ma se il massimo divisore di due dei numeri dati non dividesse gli altri, allora si cercherebbe un nuovo divisore massimo di quel-

lo già trovato e di un terzo numero dato; e se questo secondo divisore non dividesse gli altri numeri dati, si cercherebbe ancora un terzo divisore massimo del secondo divisore ottenuto e di un quarto numero dato; e così di seguito fino a rinvenire un ultimo divisore, che sarebbe precisamente il numero richiesto. Siano dati, per esempio, i numeri 828, 468, 306 e 171. Cercando il massimo divisore di 828 e 468 si troverà 36, il quale non dividendo esattamente nè 306, nè 171, non potrà essere il numero richiesto. Si cercherà allora un secondo divisore massimo di 306 e 36: si troverà 18, che poi non divide esattamente 171. Si passerà in conseguenza alla ricerca di un terzo divisore massimo di 171 e 18, il quale è 9, e sarà ancora divisore massimo dei quattro numeri dati.

46. Poichè la divisibilità di un numero per un altro suppone che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore, ne segue che il divisore massimo di più numeri dati debba comporsi di tutti i fattori primi comuni agli stessi numeri; e fatta che sarà la divisione di ciascun numero pel massimo divisore comune, tutti i quozienti dovranno essere primi tra loro, poichè pel fatto della divisione saranno stati soppressi tutti i fattori comuni. Così decomposti nei loro fattori primi i quattro numeri dell'ultimo esempio, si troverà

$$828 = 2.2.3.3.23$$

$$468 = 2.2.3.3.13$$

$$306 = 2.3.3.17$$

$$171 = 3.3.19.$$

Sono dunque 3 e 3 i fattori primi comuni ai quattro numeri dati, ed il loro prodotto $3.3 = 9$ abbiamo trovato essere il massimo divisore richiesto. Dividendo poi i quattro numeri per 9, si avranno i quozienti $2.2.23 = 92$, $2.2.13 = 52$, $2.17 = 34$, e 19; numeri evidentemente primi tra loro.

47. La teorica dei numeri primi ci offre ancora un mezzo di facile soluzione al seguente problema, di cui avremo sovente a far uso nel calcolo delle frazioni: *determinare il minimo dividen-*

do per più numeri dati; vale a dire il numero più piccolo che sia divisibile per ciascuno di essi. Siano 12, 9, 8, 6, 3 e 24 i numeri dati. Decomponendoli nei loro fattori primi, avremo

$$\begin{aligned} 12 &= 2.2.3 \\ 9 &= 3.3 \\ 8 &= 2.2.2 \\ 6 &= 2.3 \\ 3 &= 3 \\ 24 &= 2.2.2.3. \end{aligned}$$

I numeri dati risultando così da diverse combinazioni dei fattori 2 e 3, il loro minimo dividendo comune dovrà esser composto dagli stessi fattori primi, e contenerli quel numero di volte che sarà richiesto dalla condizione di divisibilità. Quindi se il minimo dividendo contenesse meno di 3 volte il fattore 2, non sarebbe più divisibile per 8 nè per 24, e se contenesse meno di 2 volte il fattore 3, non sarebbe divisibile per 9. Dunque il minimo dividendo sarà il prodotto $2.2.2.3.3 = 72$.

Ed in generale: per comporre il minimo dividendo per più numeri dati, bisognerà sciogliere i numeri nei loro fattori primi; indi se ne formerà un prodotto, nel quale ciascuno dei fattori primi sarà ripetuto quel numero di volte, che sarà il massimo delle varie quantità di volte per cui è ripetuto nei diversi numeri dati; ed il prodotto così composto sarà il minimo dividendo richiesto.

CAPO OTTAVO.

Osservazioni sulle pruove di calcolo, e sul numero delle operazioni elementari.

48. Che nell'eseguire un operazione di calcolo possano per avventura commettersi degli errori, non vi sarà chi voglia negarlo, e che in conseguenza ardisca rigettare i mezzi di pruova che valessero a far certo l'operatore di aver ben condotto il suo calcolo, o almeno gl'indicassero l'esistenza di qualche errore, di cui

non sarebbe poi malagevole rinvenire il luogo. Ma i mezzi di pruova escogitati dagli aritmetici, e che vengono insegnati a quanti si presentano nelle scuole per apparare le operazioni del calcolo, valgono poi a produrre questo grado di certezza nell'animo del calcolatore che ragiona? — Vediamo. Qui a fianco si

7846
594
8372
643
17455
9609
7846

veggono scritti quattro numeri, dalla cui addizione si è ottenuta la somma 17455: si vuol sapere se questa sia esatta, vale a dire se nell'eseguire l'operazione si siano o pur no commessi degli errori. Un mezzo di pruova insegnato dai maestri di aritmetica è il seguente: *si separi con una lineetta orizzontale il primo dei numeri addizionati; si cerchi la somma dei rimanenti* (che nel caso nostro è 9609), *e si sottragga dalla prima: se l'addizione è stata esatta, il residuo dovrà riprodurre il primo numero* — Questo metodo di pruova poggia sopra un principio eminentemente razionale: *il tutto, diminuito di una sua parte, deve dare per residuo l'altra parte*; e questo è un assioma. Ma non è egualmente razionale l'applicazione che ne abbiamo veduta. Poichè si debbono addizionare i numeri dati meno il primo, in quest'addizione possono avvenire degli errori: come riconoscerli? — Forse con un'altra addizione meno il secondo numero? Ma così avremmo delle pruove di pruove che esaurirebbero la pazienza di un calcolatore alemanno — E poi dalla prima somma dovendosi sottrarre la seconda, nuovi errori possono accadere in questa sottrazione. Bisognerebbe allora mettere a pruova il residuo; ed in qual modo? Per mezzo di un'altra addizione — E chi potrebbe rinvenire in questa serie di conseguenze inevitabili un solo elemento, non dico di buon senso, ma di senso comune! — Nè il metodo mercantile di mettere a pruova la somma col rifare in senso opposto le addizioni delle diverse colonne di cifre, ha un valor logico maggiore; poichè quando la seconda somma sia divergente dalla prima, non sapremo in quale dello due sia avvenuto l'errore.

Similmente si apprende a sperimentare l'esattezza del residuo, addizionandolo col numero minore; l'esattezza del quoziente, moltiplicandolo pel divisore; e quella del prodotto, dividendolo per uno dei fattori. Ed in generale si vuol sempre mettere a pruova un'operazione per mezzo di un'altra; vale a dire che si vuol erigere a criterio del vero quello stesso fatto, nel quale si è già riconosciuta la possibilità dell'errore.

49. La pruova del quoziente per mezzo della moltiplicazione, e quella del prodotto per mezzo della divisione, riuscirebbero laborioso, quando si avesse ad operare sopra numeri di più cifre; perciò gli aritmetici vi hanno sostituito quella del 9, ch'è assai più breve. Partendo dal principio che il resto del prodotto di due fattori diviso per un dato numero, debba pareggiare il prodotto dei resti dei due fattori divisi per lo stesso numero, ed attesa inoltre la grande facilità di calcolare il resto della divisione per 9 (n° 43), hanno proposto la seguente regola: *si addizionino le cifre del prodotto, se ne divida la somma per 9, e si tenga nota del resto; si addizionino poi separatamente le cifre dei due fattori, se ne dividano le somme per 9, e si faccia il prodotto dei resti: questo prodotto, dopo averne tolto il moltiplice di 9 che vi può esser contenuto, dovrà risultare eguale al resto, dato dal prodotto dei due fattori* — La stessa regola vale ancora per la divisione, sostituendo il dividendo al prodotto, ed il divisore e quoziente ai due fattori — Or considerando che la divisione di un numero per 9 darà sempre lo stesso resto, quando la somma delle cifre rimano costante comunque se ne alterasse il valore proprio, è facile comprendere la possibilità di trovare in difetto la pruova del 9.

50. Dunque, dirà taluno, so i mezzi di pruova escogitati finora dagli aritmetici non reggono al rigore della critica, ogni risultamento numerico sarà sempre incerto. No; il calcolatore che sa sostenere la sua attenzione sull'operazione che sta eseguendo, è sempre sicuro del risultamento che ne ottiene. È d'uopo però sapersi formare quest'abito di attenzione continuata, in cui si risolve ogni utilità logica che può sperarsi dallo studio della matematica in generale, e da quello del calcolo in ispecie; ed a questa abitudine, come ad ogni altra, non si perviene che per mezzo di lungo esercizio.

51. Ma poniamo pure che le regole di pruova proposte dagli aritmetici meritassero di esser praticate. Niuno vorrà negarci che il soccorso della pruova là dev'essere più inteso, ove il calcolo è più complicato. Fingiamo, per esempio, che un capitalista voglia prestare 400000 mila ducati alla ragione annua del 3 per 100, ricevendosi in iscomputo una rendita di 3000 ducati al mese; si cerca sapere il tempo pel quale la rendita dev'essere devoluta al creditore, affinché questi sia soddisfatto sì del capitale che degl'interessi.

Questo problema è facilmente risoluto coll'uso delle tavole logaritmiche. Ma se anche il computista incaricato a risolverlo, sapia farne uso, le parti contraenti non sapranno restar soddisfatte della risposta data dai logaritmi, secca secca come un oracolo sibilliano. Esse ameranno piuttosto veder ordinato in un quadro, ed anno per anno ciò che si diffalca dal debito principale e ciò che si paga a solo titolo d'interessi. Allora bisognerà ricorrere a centinaia e centinaia di moltiplicazioni, divisioni, addizioni e sottrazioni; e se per avventura in una di queste operazioni avvenisse un errore, questo centuplicherebbe nell'ultimo risultamento. Sarebbe questo uno dei tanti casi in cui l'utilità delle prove dovrebbe manifestarsi in tutta la sua pienezza: ed intanto quale computista, per pruovare ogni operazione, vorrebbe duplicarne il numero, già per se stesso troppo grande? Dunque le regole di prove, dopo aver fatto slogicare nella scuola, non valgono a nulla più.

52. Un'altra interessante osservazione ci rimane a fare sulle materie esposte in questa prima sezione, e che riguarda il numero delle operazioni aritmetiche che debbono riguardarsi come elementari. Alcuni pretendono che questo formo prime di calcolo debbano estendersi a sei, che sono l'addizione, la moltiplicazione e l'elevazione a potenza colle loro inverse, vale a dire la sottrazione, la divisione e l'estrazione delle radici; altri poi pretendono limitarle all'addizione e sottrazione. A noi pare che gli uni e gli altri avessero torto, non appoggiando le loro sentenze alla vera idea di operazione elementare. Ed in vero ponendo, come è giusto, che l'aggiunto *elementare* si debba a quelle operazioni di calcolo che non ponno risolversi in altre, è chiaro che la loro categoria debba comprendere soltanto le quattro operazioni esposte in questa sezione; poichè se l'elevazione a potenza e l'estrazione di radice costituiscono speciali modi di calcolare i numeri, o (come dicono i matematici) speciali funzioni, ciò non ostante esse si compongono delle quattro suddette operazioni. Quanto poi a volerle ridurre a due soltanto, l'inesattezza dell'idea è manifesta, poichè si va a confondere la natura di un'operazione col metodo di soluzione di un problema. Poniamo per esempio che dovendo moltiplicare 573 per 284, noi facessimo in vece della moltiplicazione un'addizione, durando così nella pazienza di scrivere 284 volte il numero 573: sarà la somma eguale al prodotto richiesto. Avremo

così con un metodo lunghissimo risoluto il problema proposto, ma non avremo risolta la moltiplicazione in addizione. Similmente se in vece di eseguire la divisione di un numero per un altro, sottrareremo questo dal primo tante volte di seguito per quanto sarà possibile l'operazione, avremo il valore del quoziente nel numero delle sottrazioni eseguite, ma non avremo ridotto la divisione al suo elemento.

SEZIONE SECONDA.

Calcolo dei numeri frazionari.

CAPO PRIMO.

Definizioni.

53. Abbiamo detto nel Capo 1 della Sezione precedente che il numero prende origine dalla comparazione di una grandezza alla sua unità. Or per eseguire questa comparazione o misura, quando la grandezza è minore dell'unità, bisogna divider questa in tal numero di parti eguali che una o più di esse facciano un tutto eguale alla grandezza data; dimodochè il suo valore sarà espresso dal rapporto della somma delle parti, necessarie ad eguagliarla, alla somma totale delle parti in cui è stata divisa l'unità. Se, a cagion di esempio, per determinare il rapporto di una certa lunghezza al palmo, abbiamo dovuto dividerlo in 10 parti eguali, perchè così facendo abbiamo trovato che 7 di esse eguagliavano la lunghezza data ¹; avremo che il rapporto richiesto sarà in questo caso quello di 7 a 10 — Questi numeri esprimenti grandezze minori dell'unità, si dicono *numeri frazionari*, o semplicemente *frazioni*, *fratti* o *rotti*.

¹ Da ciò si rileva l'utilità di avere le diverse unità di misura divise e suddivise in parti piccolissime. Così avendo la canna divisa in palmi, il palmo in decimi, questi in centesimi, ec.; basterà adagiare sulla canna la lunghezza che si vuol misurare, per conoscere immediatamente a quanti palmi, decimi, centesimi, ec. essa equivale. E se l'indicazione effettiva di certe suddivisioni sulla

54. L'espressione dunque di un numero frazionario deve comporsi necessariamente di due termini: l'uno di essi dinoterà in quante parti è stata divisa l'unità, e dicesi *denominatore*, perchè somministra il nome alle parti; l'altro è il *numeratore* che indica o *numera* la quantità di parti necessaria ad eguagliare la grandezza data. Così nelle espressioni *tre settimi* e *cinque ottavi*, *tre* e *cinque* sono numeratori, perchè esprimono le quantità delle parti; *sette* ed *otto* sono denominatori, perchè da essi derivano i nomi *settimi* ed *ottavi* dati alle parti dell'unità.

55. I due termini di una frazione si scrivono separati da una lineetta orizzontale, sulla quale si pone il numeratore, e sotto di essa il denominatore: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$ esprimono *due terzi*, *quattro noni*. Rispetto poi alla numerazione parlata delle frazioni è da osservarsi che il numeratore si leggerà sempre come se fosse un numero intero; ma il denominatore, estendendosi da 2 a 10 prenderà le denominazioni speciali *metà*, *terzi*, *quarti*, *quinti*, *sesti*, *settimi*, *ottavi*, *noni*, *decimi*; al di là di quest'ultimo limite formerà il suo nome da quello dell'intero, mutandone la terminazione in *esimi*. Quindi le frazioni $\frac{47}{80}$, $\frac{21}{200}$, $\frac{712}{1001}$ si leggeranno *quarantasette ottantesimi*, *ventuno duecentesimi*, *settecento dodici milleunesimi*, traendo da *ottant-a ottant-esimi*, da *duecent-o duecent-esimi*, e da *milleun-o milleun-esimi*.

CAPO SECONDO.

Teoremi sulle frazioni.

56. Sarebbe impossibile dichiarare la ragione dei metodi di calcolo delle frazioni senza premettere la conoscenza di taluni teoremi ad esse relativi, e che i nostri maggiori comprendevano sotto l'espressione generale di *operazioni ancillari*, perchè inserienti alla dichiarazione di questi metodi.

canna od altra unità di lunghezza non può aver luogo per la loro estrema piccolezza, i *nonii* e le *viti micrometriche* vengono a farne le veci nella determinazione delle più piccole parti dell'unità principale.

1. *Una frazione equivale al quoziente di una divisione, di cui il numeratore è dividendo ed il denominatore è divisore* — Prendiamo ad esempio la frazione $\frac{5}{8}$, la quale esprime che si son prese 5 delle 8 parti, in cui l'unità è stata divisa. Or lo scopo del teorema è quello di dimostrare che 5 delle 8 parti dell'unità equivalgono alla 8^{a} parte di 5 unità; ed in generale che in una frazione qualunque $\frac{n}{m}$, n parti dell'unità divisa in m parti eguali, equivalgono alla m^{esima} parte di n unità — Ed in vero, prendendo qualunque frazione che abbia 1 per numeratore, come $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, ec. è evidente che in esse l'idea di frazione s'immagina con quella di quoziente. Or se in vece di dividere 1 per 8, avessimo a dividere 5 per 8, il quoziente che prima era $\frac{1}{8}$ dovrebbe divenire 5 volte maggiore ossia $\frac{5}{8}$; vale a dire che $\frac{5}{8} = 5 : 8$; ed in generale la frazione $\frac{n}{m} = n : m$.

Da questo teorema derivano parecchi corollari.

— 1° Mediante una frazione si potrà completare il quoziente di una divisione che avesse residuo. Così dividendo 17 per 5, si ha il quoziente 3 col residuo 2: questo residuo dovendosi ancora dividere per 5, dà il quoziente $\frac{2}{5}$; quindi $17 : 5 = 3 + \frac{2}{5}$. Vale a dire che si completerà il quoziente di una divisione, aggiungendovi un fratto che abbia il residuo per numeratore ed il divisore per denominatore.

— 2° Un'espressione frazionaria che avesse il numeratore eguale al denominatore, rappresenterebbe l'unità; così $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{12}{12}$, ec. sono $= 1$, e perciò eguali tra loro: quindi l'unità può esprimersi con infinite forme frazionarie.

— 3° In ogni espressione frazionaria, che abbia il numeratore maggiore del denominatore, ¹ sarà contenuto un numero intero che la divisione farà conoscere: così .

$$\frac{12}{3} = 4, \quad \frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2}, \quad \frac{38}{7} = 5 + \frac{3}{7}.$$

¹ L'uso pretende distinguere le frazioni in vere e spurie. È vero il fratto che

— 4° Un numero intero può facilmente ridursi a forma frazionaria di dato denominatore. Sia 8 l'intero da ridursi ad espressione frazionaria col denominatore 5: chiamando x il numeratore incognito, avremo

$$8 = \frac{x}{5}.$$

E poichè pel teorema dimostrato il numeratore x rappresenta il dividendo, il denominatore 5 è il divisore, e l'intero 8 il quoziente, dovrà essere il numeratore $x = 8 \times 5 = 40$. Dunque un numero intero si riduce ad una espressione frazionaria equivalente, moltiplicandolo pel denominatore dato, e prendendo il prodotto per numeratore.

II. *Aumentando o diminuendo il numeratore di una frazione, il suo valore diverrà più grande o più piccolo* — Poichè aumentando il numeratore si accrescerà il numero delle parti tolte fra quelle dell'unità divisa; e diminuendo il numeratore la quantità di esse parti diverrà più piccola. Così aggiungendo 2 al numeratore della frazione $\frac{3}{8}$ avremo $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$ ¹; e togliendo 2 dallo stesso numeratore si avrà $\frac{1}{8} < \frac{3}{8}$.

III. *Aumentando o diminuendo il denominatore di una frazione, il suo valore diverrà viceversa più piccolo o più grande* — Aggiungiamo, per esempio, 3 al denominatore della frazione $\frac{5}{6}$, avremo $\frac{5}{9} < \frac{5}{6}$, poichè le parti 9^e dell'unità sono più piccole delle parti 6^e; e togliendo viceversa 3 dal denominatore della frazione $\frac{5}{11}$ si ottiene $\frac{5}{8} > \frac{5}{11}$, perchè l'unità venendo divisa in minor numero di parti, queste risulteranno più grandi.

Osservando che una frazione aumenta col crescere del nume-

ra il numeratore minore del denominatore, e *spurio* quello che ha il numeratore eguale o maggiore del denominatore. Pare che Condillac fosse stato il primo a sostituire alla denominazione insignificante di *fratto spurio* quella di *espressione frazionaria*.

¹ Col segno $<$ si esprime la disuguaglianza: il numero maggiore giace tra i lati dell'angolo, il minore è situato al vertice.

ratore, e diminuisce coll'aumentare il denominatore, pare dover-
 sene dedurre che una frazione dovesse rimanere inalterata, quan-
 do uno stesso numero fosse aggiunto o tolto dai suoi due termi-
 ni; ciò che poi non ha luogo. Ed in vero dall'essere eguali i nu-
 meri che si aggiungono o tolgono dai due termini di una frazio-
 ne, non ne segue che siano eguali le opposte alterazioni che s'in-
 ducono nel suo valore. Prendiamo ad esempio la frazione $\frac{3}{7}$:
 aggiungendo 2 al suo numeratore abbiamo $\frac{5}{7}$, ed il suo valo-
 re si trova aumentato di $\frac{2}{7}$; e se poi aggiungiamo anche 2 al
 denominatore della frazione aumentata $\frac{5}{7}$, il suo valore dive-
 nendo $\frac{5}{9}$, si troverà diminuito di $\frac{5}{7} - \frac{5}{9}$. Or l'invariabi-
 lità del numero 2 aggiunto ai due termini della frazione $\frac{3}{7}$ non
 dimostra che l'aumento $\frac{2}{7}$ prodotto dall'addizione del 2 al nu-
 meratore, debba pareggiare la diminuzione $\frac{5}{7} - \frac{5}{9}$ nascente
 dall'addizione del 2 al denominatore. E potremmo invece rilevare
 facilmente la disuguaglianza di queste due opposte alterazioni, se
 avessimo già esposto il metodo di sottrazione dei fratti: ma pos-
 siamo prendere degli esempli che non richieggono questo calco-
 lo, e che ci vengono somministrati da tutte le frazioni i cui nu-
 meratori differiscono di una sola unità dai rispettivi denominato-
 ri. Prendiamo ad esempio la frazione $\frac{29}{30}$ che trasformiamo in
 $\frac{49}{50}$ aggiungendo 20 ai suoi due termini: la frazione $\frac{29}{30}$ dif-
 ferisce dall'unità di $\frac{1}{30}$, e l'altra manca da 1 di $\frac{1}{50}$; la frazio-
 ne trasformata è dunque maggiore della primitiva, perchè meno
 di questa differisce dall'unità; ed in conseguenza l'addizione di
 20 ai due termini della frazione $\frac{29}{30}$ l'ha resa più grande di
 quella che era.

Giacchè una frazione rimane alterata coll'aggiungere o toglie-
 re uno stesso numero ai suoi termini, cerchiamo quale rapporto
 di grandezza debbono avere tra loro i numeri che si potranno ag-
 giungere o togliere al numeratore e denominatore di una data

frazione, perchè il suo valore rimanesse invariato. Sia $\frac{3}{4}$ la frazione data, e chiamiamo x il numero da potersi aggiungere al numeratore ed y quello del denominatore, affinchè risultasse

$$\frac{3}{4} = \frac{3+x}{4+y}.$$

Moltiplicando queste due quantità eguali, prima per 4 e poi per $4+y$, avremo successivamente

$$3 = 4 \times \frac{3+x}{4+y}, \quad 3(4+y) = 4(3+x),$$

poichè $3+x$ essendo nel tempo stesso diviso dal suo denominatore $4+y$, e moltiplicato dal fattore $4+y$, ritorna invariato. Or l'ultima di queste due eguaglianze si risolve evidentemente in

$$3.4 + 3.y = 4.3 + 4.x,$$

da cui togliendo i due prodotti eguali 3.4 e 4.3 , resta

$$3.y = 4.x.$$

Dividiamo queste due quantità eguali per y , ed avremo

$$3 = \frac{4.x}{y},$$

e dividiamo ancora questi due quozienti per 4, ed avremo finalmente

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{y}.$$

Dunque: i due numeri che si possono rispettivamente aggiungere ai due termini di una frazione senz'alterarne il valore, debbono comporre una frazione eguale alla data.

Così aggiungendo termine a termine alla frazione $\frac{3}{4}$ le sue eguali $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{21}{28}$, essa verrà trasformata nelle frazioni equivalenti $\frac{9}{12}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{24}{32}$.

Lo stesso ragionamento vale ancora pei numeri che possono sottrarsi dai due termini di una frazione; e quindi la stessa regola. Dalla quale poi si ottengono i seguenti corollari.

— 1° Aggiungendo o togliendo uno stesso numero ai due termini di una frazione vera, essa aumenterà nel primo caso, e diminuirà nel secondo — 2° Un' espressione frazionaria $= 1$ rimarrà inalterata togliendo od aggiungendo uno stesso numero ai suoi termini — 3° Un' espressione frazionaria maggiore dell'unità, decrescerà di valore per l'addizione di uno stesso numero ai suoi termini, ed aumenterà viceversa per analoga sottrazione.

IV. *Moltiplicando o dividendo per un dato numero il numeratore di una frazione, il suo valore sarà moltiplicato o diviso per lo stesso numero* — Quando si moltiplica il numeratore di una frazione per 2, 3, 4, ec. si viene a prendere un numero di parti doppio, triplo, ec. ed in conseguenza un valore doppio, triplo, ec.; e quando il numeratore si divide per 2, 3, 4, ec. il valore della frazione si riduce alla metà, al terzo, ec. perchè si prende la metà, il terzo ec. del numero delle parti.

V. *Moltiplicando o dividendo per un dato numero il denominatore di una frazione, il valore di essa sarà viceversa diviso o moltiplicato per lo stesso numero* — Ponendo che il denominatore sia moltiplicato per 2, l'unità sarà divisa in un doppio numero di parti, e ciascuna di esse in conseguenza avrà la metà del valore che prima aveva: perciò lasciando inalterato il numeratore, la frazione sarà ridotta alla metà del primo valore. Così moltiplicando per 2 il denominatore della frazione $\frac{3}{7}$ avremo

$$\frac{3}{14} = \frac{3}{7} : 2; \text{ e similmente si dimostra che } \frac{3}{7 \cdot 4} = \frac{3}{28} = \frac{3}{7} : 4, \text{ ec.}$$

Dividendo viceversa il denominatore di una frazione per 2, 3, ec. l'unità verrà divisa in un numero di parti 2, 3 volte minore del primo, e perciò il valore di ciascuna parte diverrà 2, 3 volte più grande; quindi conservando lo stesso numeratore, la frazione sarà divenuta doppia, tripla ec. Prendiamo ad esempio la frazione $\frac{5}{24}$: dividiamone il denominatore per 3, ed avremo $\frac{5}{8}$ ch'esprimerà un valore triplo di $\frac{5}{24}$, poichè le parti 24^e per divenire parti 8^e hanno dovuto riunirsi 3 a 3, vale a dire che ciascuna di esse è venuta a triplicarsi.

VI. Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero i due termini di una frazione, essa conserverà inalterato il suo valore — Poichè quell'alterazione che il suo valore riceve dalla moltiplicazione o divisione del numeratore, rimane distrutta dall'opposta alterazione prodotta per analoga operazione sul denominatore. Se, per esempio, moltiplichiamo per 5 i due termini della frazione $\frac{3}{7}$, avremo $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$; poichè avendo moltiplicato il numeratore 3 per 5 la frazione è divenuta 5 volte più grande, ma poi essa è divenuta 5 volte minore dietro la moltiplicazione del denominatore, e quindi è ritornata al valore primitivo. Lo stesso ragionamento vale rispetto alla divisione dei due termini di una frazione per uno stesso numero. Quindi si rileva

— 1° Che una frazione può assumere infinite forme equivalenti con prendere eguali fattori nei due termini. Così

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{6}{9} = \frac{14}{21} = \text{ec.}$$

— 2° Che l'espressione di una frazione può semplificarsi dividendo i suoi termini per uno stesso numero. Così dividendo successivamente per 2 i termini della frazione $\frac{64}{128}$, avremo le trasformazioni

$$\frac{64}{128} = \frac{32}{64} = \frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Quindi una frazione sarà ridotta alla forma sua più semplice, dividendone i due termini pel loro massimo divisore comune. Così ridurremo alla forma più semplice $\frac{3}{11}$ la frazione $\frac{252}{924}$, cercando col metodo esposto nel n° 44 il massimo divisore di 252 e 924, che si troverà essere 84; e poi dividendo per questo massimo divisore i due termini della frazione proposta. ¹

1 A rigore parlando non havvi sulle frazioni che un solo teorema, ed è quello che ne stabilisce l'identità col quoziente di una divisione: tutti gli altri teoremi ne derivano come corollari. Ed in vero chiamando v il valore della frazione $\frac{a}{b}$, avremo

$$1^{\circ} \quad \frac{a+m}{b} > v, \quad \frac{a-m}{b} < v.$$

CAPO TERZO.

Addizione dei fratti.

57. La somma di più frazioni dovendo esprimere la somma di più parti, in cui l'unità s'immagina divisa, è chiaro che più frazioni non si potranno addizionare, se non abbiano lo stesso denominatore. E ponendo che questa condizione sia soddisfatta, ne otterremo la somma addizionando tutti i numeratori, come quelli ch'esprimono le quantità di parti, e scrivendo sotto di essa il denominatore comune, che servirà ad indicare il valore di ciascuna parte. Così

$$\frac{1}{7} + \frac{4}{7} + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} = \frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7},$$

$$\frac{5}{8} + \frac{4}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}.$$

Se poi le frazioni date avessero diverso denominatore, come

$$2^{\circ} \quad \frac{a}{b+m} < v, \quad \frac{a}{b-m} > v.$$

$$3^{\circ} \quad \frac{na}{b} = nv, \quad \frac{a}{nb} = \frac{v}{n}.$$

$$4^{\circ} \quad \frac{\frac{1}{n}a}{b} = \frac{v}{n}, \quad \frac{a}{\frac{1}{n}b} = nv.$$

$$5^{\circ} \quad \frac{na}{nb} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\frac{1}{n}a}{\frac{1}{n}b} = \frac{a}{b}.$$

Purtuttavia adattando a ciascuno di questi corollari una speciale dimostrazione, ne abbiamo fatto altrettanti teoremi, poichè l'esperienza dell'insegnamento ci ha dimostrato che sotto questa forma riescono di più facile intelligenza, ed anche più facilmente si ritengono a memoria.

$$\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{2}{9}, \frac{7}{12},$$

allora bisognerà primieramente ridurle ad un denominatore comune nel seguente modo — Supponendo che le frazioni date fossero irriducibili a forma più semplice, è chiaro che non potremo ridurle ad un denominatore comune che lasci inalterato il valore di ogni fratto, senza che nei termini di ciascuno di essi introduciamo dei fattori speciali, e tali che facciano risultare eguali tutti i denominatori. Questo risultamento potremmo ottenerlo d'infinito maniere; ma la brevità necessaria a questo calcolo preparatorio richiede che il denominatore comune risulti il più piccolo possibile. Or dovendo questo numero ottenersi dalla moltiplicazione di ogni denominatore per un fattore speciale, sarà necessariamente divisibile per ognuno di essi; e poichè dev'essere il numero più piccolo possibile, sarà dunque il minimo dividendo comune dei denominatori dati. Perciò dopo aver ottenuto col metodo esposto nel n° 47 il minimo dividendo 72 dei numeri 6, 4, 8, 9 e 12, che sono i denominatori delle frazioni date, si dividerà 72 per ciascuno di essi; ed il quoziente, che sarà il numero che avrà moltiplicato il primo denominatore per farlo eguale al minimo dividendo, si aggiungerà come fattore al rispettivo numeratore. In questo modo ogni fratto rimarrà inalterato, venendo i suoi termini ad essere moltiplicati per uno stesso numero. Così avremo

$$\frac{5}{6} = \frac{60}{72}, \frac{3}{4} = \frac{54}{72}, \frac{7}{8} = \frac{63}{72}, \frac{2}{9} = \frac{16}{72}, \frac{7}{12} = \frac{42}{72},$$

ed in vece dell'addizione

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{2}{9} + \frac{7}{12}$$

avremo

$$\frac{60}{72} + \frac{54}{72} + \frac{63}{72} + \frac{16}{72} + \frac{42}{72} = \frac{235}{72} = 3 + \frac{19}{72}$$

58. Se i denominatori delle frazioni che si vogliono addizio-

nare, fossero primi tra loro, il minimo dividendo risulterebbe eguale al prodotto di tutti i denominatori, ed allora ogni numeratore, per conservare il valore del fratto a cui appartiene, dovrà essere moltiplicato pel prodotto di tutti i denominatori meno il suo. Di questo caso speciale l'aritmetica pratica avendo fatto una regola generale, l'operatore talvolta si trova impegnato in calcoli lunghissimi che avrebbe potuto facilmente evitare.

Sieno date per esempio le frazioni

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{2}{7}.$$

Poichè i denominatori 4, 9 e 7 sono numeri primi tra loro, il minimo dividendo richiesto sarà $4.9.7 = 252$. Avremo così a moltiplicare il primo numeratore per $63 = 9.7$, il secondo per $28 = 4.7$, ed il terzo per $36 = 4.9$; e la somma delle frazioni ridotte ed equivalenti alle date sarà

$$\frac{189}{252} + \frac{140}{252} + \frac{72}{252} = \frac{401}{252} = 1 + \frac{149}{252}$$

59. Ed in fine, dovendo addizionare interi uniti a fratti, si comincerà dal cercare la somma degli ultimi, affinchè risultandone un intero, si possa aggiungere alla somma corrispondente, come si può vedere nell'esempio che segue.

$$24 + \frac{1}{2} = 24 + \frac{30}{60}$$

$$8 + \frac{7}{10} = 8 + \frac{42}{60}$$

$$43 + \frac{2}{3} = 43 + \frac{40}{60}$$

$$32 + \frac{3}{4} = 32 + \frac{45}{60}$$

$$\hline 109 + \frac{37}{60}$$

CAPO QUARTO.

Sottrazione dei fratti.

60. La sottrazione dei fratti può presentarsi in uno dei seguenti casi — 1° Frazione da sottrarsi da frazione — 2° Frazione da sottrarsi da intero — 3° Intero più frazione da sottrarsi da intero — 4° Intero più frazione da sottrarsi da intero più frazione — Esaminiamoli successivamente.

I. Di due frazioni disuguali considerando la maggiore come somma della minore e di quella che si cerca, è chiaro che la sottrazione non potrà aver luogo tra due frazioni, se esse non hanno lo stesso denominatore; e che soddisfatta questa condizione, otterremo il residuo sottraendo dal numeratore della frazione maggiore quello della minore. Così

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}.$$

Se poi le frazioni date avessero diverso denominatore, si ridurrebbero ad un denominatore comune prima di procedere alla sottrazione. Poniamo per esempio di voler sottrarre $\frac{3}{8}$ da $\frac{5}{7}$: riducendo le due frazioni allo stato denominatore, abbiamo

$$\frac{3}{8} = \frac{21}{56}, \quad \text{e} \quad \frac{5}{7} = \frac{40}{56}; \quad \text{quindi}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{8} = \frac{40}{56} - \frac{21}{56} = \frac{19}{56}.$$

II. Supponiamo che si volesse sottrarre la frazione $\frac{3}{4}$ dall'intero 6: togliendo un'unità da questo e riducendola a quarti, avremo $6 = 5 + \frac{4}{4}$. In tal modo la sot-

$$5 + \frac{4}{4}$$

trazione ha luogo tra due frazioni di eguali denominatori; ed avremo, come si vede qui a lato, il residuo $5 + \frac{1}{4}$. Ed in generale: per sottrarre una fra-

$$\frac{3}{4}$$

$$5 + \frac{1}{4}$$

zione da un intero, bisogna togliere un'unità dall'intero e ridurla a forma frazionaria collo stesso denominatore

della frazione data; indi eseguire la sottrazione dei due fratti; ed aggiungendo a questo residuo ciò ch'è rimasto dell'intero, si avrà il numero richiesto.

III. Sia $4 + \frac{5}{9}$ da sottrarsi da 15. Decomporre-
mo questo numero come nel caso precedente, ed avremo $15 = 14 + \frac{9}{9}$; ed in tal modo determineremo facilmente il residuo, sottraendo frazione da frazione, ed intero da intero — La regola generale relativa a questo caso è facilissima ad esser formolata.

$$\begin{array}{r} 14 + \frac{9}{9} \\ 4 + \frac{5}{9} \\ \hline 10 + \frac{4}{9} \end{array}$$

IV. Sia $8 + \frac{1}{3}$ da sottrarsi da $13 + \frac{5}{7}$. Riducendo i due fratti allo stesso denominatore, avremo

$$13 + \frac{5}{7} = 13 + \frac{15}{21}, \text{ e } 8 + \frac{1}{3} = 8 + \frac{7}{21}.$$

Quindi

$$\left(13 + \frac{5}{7}\right) - \left(8 + \frac{1}{3}\right) = \left(13 + \frac{15}{21}\right) - \left(8 + \frac{7}{21}\right) = 5 + \frac{8}{21}.$$

Dunque: per sottrarre intero più fratto da intero più fratto, si ridurranno i due fratti allo stesso denominatore, se tale non l'abbiano; e poi si otterrà il residuo, sottraendo fratto da fratto, ed intero da intero.

È d'uopo purtuttavia osservare che se fatta la riduzione dei fratti allo stesso denominatore, si trovasse il fratto del minuendo minore di quello del sottraendo, allora bisognerebbe aumentare il primo di un'unità tolta dall'intero, a cui è aggiunto; e poi eseguire la sottrazione nel modo indicato. Così poniamo che da $9 + \frac{3}{5}$ si dovesse sottrarre $4 + \frac{7}{8}$. Ridotte le due frazioni ad un denominatore comune, avremo

$$\left(9 + \frac{24}{40}\right) - \left(4 + \frac{35}{40}\right).$$

Or non potendo sottrarre $\frac{35}{40}$ da $\frac{24}{40}$, toglieremo un'unità da 9, e la ridurremo a 40esimi; così avremo $9 = 8 + \frac{40}{40}$, ed in

conseguenza $9 + \frac{21}{40} = 8 + \frac{61}{40}$. Così la sottrazione diviene possibile, e si ha

$$\left(8 + \frac{61}{40}\right) - \left(4 + \frac{33}{40}\right) = 4 + \frac{29}{40}.$$

CAPO QUINTO.

Moltiplicazione dei fratti.

61. Questa operazione offre ancora quattro casi a considerare.

I. *Una frazione da moltiplicarsi per un intero.* Sia la frazione $\frac{3}{7}$ da moltiplicarsi per l'intero 5. Quest'operazione equivalendo all'addizione

$$\frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{3.5}{7},$$

è chiaro che se ne avrà il prodotto, moltiplicando il numeratore 3 per 5.

E poichè pel teorema V n° 56 sappiamo che il valore di una frazione rimane moltiplicato per quel numero, per cui si divide il denominatore; in conseguenza se il denominatore della frazione data sia divisibile pel moltiplicatore, potremo ottenere il prodotto richiesto sotto una forma più semplice. Sia per esempio $\frac{5}{24}$ da moltiplicarsi per 4: essendo 24 divisibile per 4, avremo

$$\frac{5}{24} \times 4 = \frac{5}{24:4} = \frac{5}{6}.$$

Dunque: si otterrà il prodotto di una frazione per un intero, sia moltiplicando il numeratore per l'intero, sia dividendone il denominatore, quando si può.

II. *Un intero per una frazione.* Sia 8 da moltiplicarsi per $\frac{3}{7}$. Se il moltiplicatore fosse 3 in vece di $\frac{3}{7}$, il prodotto sarebbe 8×3 ; ma 3 essendo 7 volte maggiore di $\frac{3}{7}$, il prodotto 8×3 sarà anche 7 volte più grande del vero. Perciò l'esatto prodotto sarà $\frac{8 \times 3}{7} = \frac{24}{7}$.

Dunque: *il prodotto di un intero per un fratto si otterrà moltiplicando l'intero pel numeratore.* Ma abbiamo trovato che nello stesso modo ancora si moltiplica un fratto per un intero; dunque non solo pei fattori interi, ma pei frazionarli ancora il valore del prodotto è indipendente dal posto dei fattori.

III. *Una frazione per un'altra.* Sia $\frac{3}{7}$ da moltiplicarsi per $\frac{5}{11}$. Se il moltiplicatore fosse 5 in vece di $\frac{5}{11}$, il prodotto sarebbe $\frac{3.5}{7}$. Ma 5 essendo 11 volte più grande di $\frac{5}{11}$, il prodotto $\frac{3.5}{7}$ sarà 11 volte più grande del vero. In conseguenza per ottenere l'esatto prodotto, bisognerà dividere $\frac{3.5}{7}$ per 11. Ma una frazione è divisa, quando il suo denominatore viene moltiplicato, dunque sarà

$$\frac{3.5}{7} : 11 = \frac{3.5}{7.11}.$$

Dunque: *si ottiene il prodotto di una frazione per un'altra, moltiplicando numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore.*

Riducendo le due frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{11}$ ad uno stesso denominatore, abbiamo $\frac{3}{7} = \frac{33}{77}$, e $\frac{5}{11} = \frac{35}{77}$. Quindi il loro prodotto $\frac{3.5}{7.11} = \frac{15}{77}$ si trova minore sì di $\frac{3}{7}$ che di $\frac{5}{11}$. Ciò dipende dall'essere il prodotto di due frazioni effetto nel tempo stesso di moltiplicazione e di divisione. Quando abbiamo moltiplicato per 5 il numeratore della frazione $\frac{3}{7}$, abbiamo realmente moltiplicato rendendo la frazione 5 volte più grande; ma quando poi abbiamo moltiplicato il denominatore 7 per 11, abbiamo realmente diviso per questo ultimo numero. Dunque pel fatto dell'operazione il fratto $\frac{3}{7}$ essendo stato moltiplicato per 3, e diviso pel numero più grande 11, ha dovuto riuscir diminuito nell'ultimo risultamento.

Da ciò si rileva che a dati eguali il prodotto di più frazioni va decrescendo come aumenta il numero delle frazioni che ne sono i fattori: così al prodotto $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$ aggiungendo il fattore $\frac{1}{2}$, avremo $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{56} < \frac{15}{28}$. Donde poi risulta che il prodotto di più frazioni piccolissime si può trascurare, per essere presso che nullo. ¹

IV. *Intero e fratto per intero, ovvero intero e fratto per intero e fratto* — Sia $5 + \frac{3}{4}$ da moltiplicarsi per 7. Vi sono due modi di eseguire questa moltiplicazione. Il primo è quello di mol-

¹ La moltiplicazione, avendo la sua vera origine nell'addizione di più numeri eguali, richiedo necessariamente un moltiplicatore intero, qualunque sia d'altronde la forma del moltiplicando. Perciò daremo giustamente il nome di moltiplicazione sì al processo di calcolo che ci darà il prodotto 54.27, che a quello con cui otterremo il prodotto $\frac{7}{11} \cdot 3$, poichè abbiamo addizione di numeri eguali sì nell'uno che nell'altro caso. Ma quando il moltiplicatore è un numero frazionario, scomparisce l'idea di somma di numeri eguali, ed il nome di moltiplicazione diviene allora improprio: ed in vero sarebbe impossibile concepire che nell'operazione $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$ si volesse ripetere $\frac{5}{7}$ di volta il $\frac{3}{4}$. I nostri maggiori, denominando *frazioni di frazioni* queste operazioni complesse di moltiplicazione e divisione, usavano un linguaggio più logico dei moderni.

Dietro queste osservazioni ci sembra oziosa la definizione della moltiplicazione, data la prima volta da Lacroix a fine di comprendere in una sola formula i due casi del moltiplicatore intero e del moltiplicatore frazionario: *la moltiplicazione è un'operazione di calcolo colla quale si vuol formare un numero per mezzo del moltiplicando, nello stesso modo che il moltiplicatore è formato per mezzo dell'unità*: così nell'esempio $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$ il moltiplicatore $\frac{5}{7}$ essendo formato per mezzo dell'unità col ripetere 5 volte la sua 7^a parte, bisognerà ripetere ancora 3 volte la 7^a parte di $\frac{3}{4}$. E la forma fittizia, che l'idea di moltiplicazione riceve da questa definizione, fa che dopo aver confuso in un solo enunciato due operazioni necessariamente distinte, per quanto lo è il semplice dal composto, non valga poi a stabilire i principi che debbono dirigere il processo del calcolo, qual'è appunto l'ufficio delle definizioni aritmetiche.

tiplicare separatamente le due parti del moltiplicando pel fattore intero; avremo così

$$\left(5 + \frac{3}{4}\right) 7 = 5 \cdot 7 + \frac{3 \cdot 7}{4} = 35 + \frac{21}{4} = 40 + \frac{1}{4}.$$

Col secondo metodo poi si compongono l'intero ed il fratto del moltiplicando in una sola espressione frazionaria; indi si esegue la moltiplicazione come nel caso di una frazione per un intero. E si avrà

$$\left(5 + \frac{3}{4}\right) 7 = \frac{23}{4} \cdot 7 = \frac{161}{4} = 40 + \frac{1}{4}.$$

In due modi analoghi ai precedenti possiamo ancora ottenere il prodotto di un intero più frazione per un intero più frazione. Sia per esempio $7 + \frac{2}{3}$ da moltiplicarsi per $5 + \frac{3}{8}$. Seguendo il primo modo avremo a moltiplicare $7 + \frac{2}{3}$ prima per 5 e poi per $\frac{3}{8}$; e poichè il prodotto di $7 + \frac{2}{3}$ per 5 si compone di $7 \times 5 + \frac{2}{3} \times 5$, e quello di $7 + \frac{2}{3}$ per $\frac{3}{8}$ è eguale alla somma dei due prodotti $7 \times \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8}$; così avremo

$$\begin{aligned} \left(7 + \frac{2}{3}\right) \left(5 + \frac{3}{8}\right) &= 35 + \frac{10}{3} + \frac{21}{8} + \frac{2}{8} \\ &= 40 + \frac{1}{3} + \frac{7}{8} = 40 + \frac{29}{24} = 41 + \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Col secondo modo poi ridurremo i due fattori ad espressioni frazionarie, ed avremo

$$\left(7 + \frac{2}{3}\right) \left(5 + \frac{3}{8}\right) = \frac{23}{3} \times \frac{43}{8} = \frac{989}{24} = 41 + \frac{5}{24}.$$

CAPO SESTO.

Divisione dei fratti.

62. Questa operazione comprende ancora quattro casi.

I. Una frazione da dividersi per un intero. Sia $\frac{6}{7}$ da dividersi per 3. Riguardando $\frac{6}{7}$ come prodotto di 3 per una fra-

zione, è chiaro che avrà dovuto esser composto o colla moltiplicazione di 3 pel numeratore della frazione richiesta, ovvero per mezzo della divisione del denominatore di questa frazione per 3. Nel primo caso il numeratore del fratto dividendo sarà multiplo del divisore intero, e la frazione quoziente si otterrà dividendo il numeratore per l'intero: quindi $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$.

Se poi la frazione dividenda è stata ottenuta per mezzo della divisione del suo denominatore per l'intero dato, nel qual caso il numeratore della frazione nota non sarà multiplo del divisore, allora si otterrà la frazione quoziente moltiplicando il denominatore del fratto dividenda pel divisore intero. Così avremo

$$\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{21}.$$

II. *Un intero da dividersi per un numero frazionario.* Sia 5 il dividendo e $\frac{3}{4}$ il divisore; l'altro fattore, ossia il quoziente, dovrà esser tale che moltiplicato per $\frac{3}{4}$ dovrà riprodurre il dividendo 5. Quindi per effetto di questa moltiplicazione avran dovuto restar eliminati il denominatore 4 ed il numeratore 3 del fratto divisore; la qual cosa non si poteva ottenere senza che il 4 fosse stato fattore del quoziente ed il 3 divisore. E poichè dopo l'eliminazione dei due numeri 4 e 3, che sono i due termini del fratto divisore, il prodotto è risultato eguale a 5, questo numero doveva essere ancora un fattore del quoziente: il quoziente dunque sarà $\frac{4 \cdot 5}{3}$, che moltiplicato in effetto per $\frac{3}{4}$ riproduce il dividendo 5.

Dunque: *per ottenere il quoziente di un intero diviso per una frazione, è d'uopo moltiplicare l'intero pel denominatore della frazione, e dividerne il prodotto pel numeratore.*

III. *Una frazione da dividersi per un'altra.* Sia $\frac{5}{7}$ da dividersi per $\frac{3}{8}$. Poichè la frazione quoziente moltiplicata per $\frac{3}{8}$ deve riprodurre $\frac{5}{7}$, sarà necessariamente composta da $\frac{5}{7}$ mol-

tiplicato per $\frac{8}{3}$; essendo che questo prodotto $\frac{5.8}{7.3}$, quando verrà moltiplicato pel fratto divisore $\frac{3}{8}$, avrà comuni i fattori 3 ed 8 sì al numeratore che al denominatore, e risulterà in conseguenza eguale a $\frac{5}{7}$ dietro la soppressione de' fattori comuni.

Dunque: *il quoziente di una frazione da dividersi per un'altra, si ottiene moltiplicando il fratto dividendo pel fratto inverso del divisore. Così*

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{11} = \frac{4.11}{5.3} = \frac{44}{15}, \quad \frac{7}{9} : \frac{5}{13} = \frac{7.13}{9.5} = \frac{91}{45}.$$

IV. *Un intero più fratto da dividersi per un intero più fratto.* In questo caso, dopo aver composto l'intero più fratto in una sola espressione frazionaria si opererà come nei casi precedenti. Così

$$\left(11 + \frac{7}{8}\right) : \left(5 + \frac{2}{3}\right) = \frac{119}{8} : \frac{17}{3} = \frac{119.3}{8.17} = \frac{357}{136} = 2 + \frac{85}{136}.$$

E per mezzo dello stesso principio si risolvono ancora i casi di divisione, in cui sono variamente combinati gl'interi colle frazioni. Così

$$8 : \left(2 + \frac{3}{5}\right) = 8 : \frac{13}{5} = \frac{8.5}{13} = \frac{40}{13} = 3 + \frac{1}{13};$$

$$\left(7 + \frac{2}{3}\right) : 4 = \frac{23}{3} : 4 = \frac{23}{12} = 1 + \frac{11}{12}.$$

63. Dalle cose esposte in questo capo si rileva che nella divisione di un numero qualunque per una frazione vera il quoziente risulterà sempre maggiore del dividendo, poichè pel fatto della divisione questo numero viene moltiplicato per un numero più grande di quello pel quale è diviso. Dividendo, per esempio, 5 per $\frac{3}{8}$, il quoziente $\frac{5.8}{3}$ ci dimostra che il 5 viene moltiplicato pel numero maggiore 8 e diviso pel numero minore 3; e perciò deve trovarsi aumentato nell'ultimo risultamento $\frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$. E quanto è più piccolo il fratto divisore, tanto più gran-

de risulterà il quoziente rispetto al dividendo, poichè dovendo questo numero risultare dal prodotto del divisore pel quoziente, non si potrà diminuire il divisore e conservare costante il dividendo, senza che aumenti il quoziente che è l'altro fattore. Così nelle divisioni

$$4 : \frac{2}{3} = \frac{12}{2} = 6, \quad 4 : \frac{2}{6} = \frac{24}{2} = 12, \quad 4 : \frac{2}{9} = \frac{36}{2} = 18, \text{ ec.}$$

noi vediamo il quoziente divenire doppio, triplo, ec. a misura che il divisore diviene metà, terza parte, ec. Perciò quando il divisore sarà pervenuto al limite delle quantità decrescenti, ossia zero, il quoziente avrà toccato il limite delle quantità crescenti, ossia l'infinito; donde si fa chiaro il significato dell'espressione $\frac{m}{0} = \infty$, m disegnando un numero qualunque, e ∞ essendo il simbolo adottato dai matematici per indicare un numero infinitamente grande.

CAPO SETTIMO.

Definizioni e teoremi relativi alle frazioni decimali.

64. Dalle regole di calcolo delle frazioni in generale si rileva che i denominatori vi prendono tal parte, da rendere non di rado assai laboriosa la ricerca del risultamento finale. Quindi per semplificare il procedimento del calcolo si è pensato eliminarne i denominatori col sottoporre i fratti al medesimo sistema di numerazione degli interi. Perciò l'unità s'immagina divisa in 10, 100, 1000, ec. parti eguali, a cui si danno i nomi di *decimi*, *centesimi*, *millesimi*, ec; e poichè così facendo ogni decimo conterrà dieci centesimi, ogni centesimo dieci millesimi, ec. ne segue che la divisione dell'unità nel modo indicato equivale ad una suddivisione continua in dieci parti eguali; donde poi ha tolto origine il nome di *frazioni decimali* dato ai numeri di questa specie.

65. Essendo il principio della numerazione parlata delle frazioni decimali identico a quello dei numeri interi, esse saranno sottoposte alla stessa legge di numerazione scritta; quindi i decimi prenderanno posto a destra della cifra delle unità, quella dei centesimi si porrà a destra di quella dei decimi, o così di seguito; e perchè le cifre rappresentanti il numero intero non rimanessero confuse con quelle della frazione decimale, si pone tra esse una virgola per segnare il confine: così 34,7 esprimerà *trentaquattro unità e sette decimi*. Se poi la frazione fosse sola, nel luogo dell'intero si porrà uno zero come caratteristico del decimale: così 0,75 esprimerà *sette decimi e cinque centesimi*.

Riuscirebbe non di rado assai incomoda la lettura di un fratto decimale, se si dovesse pronunziare il valore proprio e di sito di ciascuna sua cifra, dimodochè 0,3845 dovrebbe leggersi *tre decimi, sette centesimi, quattro millesimi e cinque diecimillesimi*. Ma osservando che una parte della 1^a divisione, ossia un decimo, vale dieci delle parti in cui è immediatamente suddivisa, e ciascuna di queste vale dieci di quelle che seguono dappresso, ne risulta che un decimale potrà leggersi come fosse un numero intero, aggiungendovi però il nome di sito dell'ultima sua cifra. Così 0,3745 verrà letto *tremila settecento quarantacinque diecimillesimi*.

E se nel valore di un fratto decimale mancassero degli ordini superiori, ne sarebbe occupato il posto da altrettanti zeri per conservare alle cifre significative il loro valore di sito: così il fratto 42 millionesimi sarà scritto 0,000042.

66. Se nell'espressione decimale 43,75 passiamo la virgola un posto a sinistra, avremo il numero 4,375 dieci volte più piccolo del primo, poichè ogni cifra dietro la trasposizione della virgola, ha preso un valore di sito dieci volte minore; e similmente avremo 0,4375 cento volte minore di 43,75 — Al contrario moviamo la virgola verso la destra, ed otterremo 437,5 dieci volte maggiore di 43,75, e 4375 cento volte più grande dello stesso numero.

Dunque in generale: *movendo la virgola in un'espressione de-*

cimale di uno, due, ec. passi verso la sinistra, il numero sarà diviso per 10, 100, ec; e movendola in vece verso la destra, il numero sarà moltiplicato per 10, 100, ec.

Aggiungendo uno, due, ec. zeri alla destra del fratto decimale 0,8 avremo

$$0,8 = 0,80 = 0,800 = 0,8000 = \text{ec.}$$

poichè l'aggiunzione degli zeri non ha alterato il valore di sito della cifra 8. Al contrario se gli zeri fossero aggiunti a sinistra, avremmo 0,08 dieci volte minore di 0,8; similmente 0,008 cento volte minore di 0,8, ec; poichè questi zeri aggiunti danno alla cifra 8 un valore di sito di dieci in dieci volte minore. E per la stessa ragione gli zeri soppressi alla sinistra di un decimale lo rendono 10, 100, ec. volte più grande, secondochè se ne tolgono uno, due, ec.

Dunque in generale: *gli zeri tolti ovvero aggiunti alla destra di un decimale, ne lasceranno invariato il valore; ed al contrario lo moltiplicheranno per 10, 100, ec. ovvero lo divideranno per 10, 100, ec. secondochè ne verranno tolti ovvero aggiunti uno, due, ec. alla sua sinistra.*

Da tutto ciò poi si rileva che un numero intero sarà diviso per 10, 100, 1000, ec. separando con una virgola dalla sua destra 1, 2, 3, ec. cifre decimali; così

$$4528 : 100 = 45,28 ; 961 : 10 = 96,1.$$

67. Questi teoremi sulle frazioni decimali divengono casi particolari di quelli esposti nel n° 56 sulle frazioni in generale. Ed in vero cominciando da quello relativo al moto della virgola, noi sappiamo — 1° che

$$42,56 \times 10 = 425,6.$$

Or dando all'espressione decimale 42,56 la forma di fratto ordinario, l'avremo eguale a $\frac{4256}{100}$; ed in conseguenza

$$42,56 \times 10 = \frac{4256}{100} \times 10.$$

Ma dal teorema V del n° 56 abbiamo appreso che dividendo il denominatore di una frazione per un numero qualunque, il valore della frazione è moltiplicato per lo stesso numero; perciò sarà

$$\frac{4256}{100} \times 10 = \frac{4256}{10} = 425,6;$$

risultamento identico a quello ottenuto mercè il moto della virgola.

— 2° Da questo teorema abbiamo ancora che

$$342,7 : 100 = 3,427.$$

E riducendo la forma decimale a quella di fratto ordinario, abbiamo

$$342,7 : 100 = \frac{3427}{10} : 100;$$

ma la moltiplicazione del denominatore per un numero produce la divisione del fratto per lo stesso numero; perciò

$$\frac{3427}{10} : 100 = \frac{3427}{1000} = 3,427$$

come sopra.

68. Similmente pel secondo teorema sulle frazioni decimali abbiamo che

$$0,27 : 100 = 0,0027 \text{ e } 0,058 \times 10 = 0,58.$$

Or dando alle espressioni decimali la forma di fratto ordinario si ottiene

$$\frac{27}{100} : 100 = \frac{27}{10000} = 0,0027 \text{ e } \frac{58}{1000} \times 10 = \frac{58}{100} = 0,58.$$

CAPO OTTAVO.

Calcolo dei fratti decimali.

69. *Addizione* — I fratti decimali, siano soli o congiunti ad interi, essendo sottoposti allo stesso sistema di numerazione che questi ultimi, dovranno seguire la stessa legge nella loro addizione. Perciò, non altrimenti che i numeri interi, li scriveremo in

colonne verticali in modo che le unità del medesimo ordine si trovino nella stessa verticale; e tirata sotto di essi una linea orizzontale, cominceremo dall'addizionare le unità dell'ordine minimo, perchè dalla loro somma potrà risultare qualche unità dell'ordine immediatamente superiore; e così poi proseguiremo collo stesso metodo con cui abbiamo operato su i numeri interi. È tale la semplicità di questa regola, che crediamo superfluo qualsiasi chiarimento al seguente esempio

$$\begin{array}{r}
 56,9 \\
 432,074 \\
 8,32 \\
 23,8653 \\
 345,572 \\
 32,46 \\
 5,7397 \\
 \hline
 904,9310
 \end{array}$$

70. Sottrazione — Sia data la frazione decimale $0,8367$ da cui si vuol sottrarre $0,5423$. Poichè la somma $0,8367$ è stata composta colla parte nota $0,5423$ e col residuo incognito, come se fossero stati due numeri interi; così opereremo collo stesso metodo che abbiamo seguito nella sottrazione dei numeri interi, ed avremo il resto $0,2944$.

Che se poi la frazione somma avesse minor numero di cifre decimali della parte nota, allora si eguaglierebbero le quantità di cifre decimali per mezzo di zeri, i quali sappiamo (n° 66) non alterare il valore del frazionario decimale, quando vengono aggiunti alla sua destra. Tal'è il caso di $0,97 - 0,3857$.

Lo stesso metodo si terrà cziandio, quando si abbia a sottrarre un decimale da un intero. Così dovendo sottrarre $0,943$ da 7 , scriveremo in vece di questo intero la sua equivalente espressione decimale $7,000$; e poi operando come negli esempi precedenti, otterremo il residuo $0,057$.

Del resto in questi due ultimi casi il calcolatore può dispensarsi dall'aggiungere zeri alla destra delle cifre decimali della somma; osservando che la loro presenza mena a dover fare una prima sottrazione da 10 e le altre da 9 per tutte quelle cifre della parte nota che non hanno corrispondenti nella somma data.

70. *Moltiplicazione* — Sia 9,58 il moltiplicando, e 4,7 il moltiplicatore. Astraendo dalle virgole, facciamo la moltiplicazione come se i due fattori fossero due numeri interi, ed avremo il prodotto 45026. Or nella composizione di questo prodotto si è impiegato il

9,58

4,7

6706

3832

45,026

fattore intero 958 in vece del decimale 9,58; si è dunque adoperato un numero 100 volte più grande del vero, essendo 958 cento volte maggiore di 9,58. Ecco una prima alterazione recata al prodotto, la quale va corretta dividendo 45026 per 100; ed avremo così che 450,26 sarà l'esatto prodotto di 9,58 moltiplicato per 47. Ma questo secondo fattore era in vece 4,7; quindi col farlo divenire 47 si è reso 10 volte più grande, e d'altrettanto maggiore del vero sarà il prodotto 450,26. Questo numero dunque dovrà dividersi ancora per 10, e divenire in conseguenza 45,026 perchè sia l'esatto prodotto di 9,58 moltiplicato per 4,7.

Dunque: si otterrà il prodotto di due decimali, moltiplicandoli come fossero interi, e poi separando dal prodotto ottenuto tante cifre decimali, quante ne hanno i due fattori.

Se poi le cifre del prodotto non fossero in numero sufficiente, allora si procederebbe come nell'esempio che segue. Sia 0,724 da moltiplicarsi per 0,008: dopo aver ottenuto il prodotto 5792 ed aver corretto l'alterazione apportata al moltiplicando la quale richiede che il prodotto si riduca a 5,792; si osservi che per dare a questo numero il suo giusto valore bisognerà dividerlo per 1000, ossia far progredire la virgola di tre passi a sinistra. Ma poichè alla sinistra della virgola non vi è che una sola cifra, così gli altri due posti dovranno essere occupati da zeri, e l'esatto prodotto sarà 0,005792 — Dunque nel caso che le cifre del prodotto non bastano, si supplirà al difetto con apporre altrettanti zeri alla sinistra del numero.

0,724

0,008

0,005792

Questa legge della moltiplicazione dei decimali deve aver luogo qualunque sia il numero dei fattori. Poniamo che si dovesse comporre il prodotto $7,94 \times 5,8 \times 9,46$: allora dopo aver trovato il prodotto di $7,94 \times 5,8 = 46,052$ si riguarderebbe questo numero come un nuovo moltiplicando che composto col moltiplicatore $9,46$ darebbe un prodotto, dal quale si dovrebbero separare cinque cifre decimali, vale a dire quante se ne trovano nei tre fattori.

72. Divisione — Questa operazione può presentare i seguenti casi — 1° Un'espressione decimale da dividersi per un numero intero — 2° Due espressioni decimali da dividersi l'una per l'altra — 3° Un intero da dividersi per un decimale. I due ultimi casi, come vedremo, non ne formano che un solo:

intanto cominciamo dal primo; e sia $37,296$ 37,296 | 7
il dividendo, 7 il divisore. 2,150 5,328

Le 37 unità divise per 7, danno il quoziente 5 col residuo 2. Queste 2 unità ridotte in decimi, ne danno 20, a cui aggiunti i 2 decimi del dividendo, si hanno 22 decimi da dividere per 7: il quoziente 3, indicando decimi, verrà distinto per mezzo di una virgola dal 5 che rappresenta unità. E continuando l'operazione collo stesso metodo, si avrà l'intero quoziente 5,328.

Supponiamo ancora che 0,93262 si debba dividere per 34. Non essendovi intero nel dividendo, segneremo nel quoziente lo zero caratteristico del fratto decimale. Cominciando poi dai decimi, troviamo che 9 non essendo divisibile per 34, il quoziente non ha decimi; e la sua prima cifra significativa si avrà dalla divisione di 93 centesimi per 34. Trovato così il primo quoziente parziale, il resto dell'operazione non offre veruna difficoltà, poichè procede collo stesso metodo della divisione degli interi.

In questo primo caso che abbiamo esaminato, il divisore è stato un numero intero; nei due casi che ci restano da considera-

re, il divisore dovrà trasformarsi in intero senza alterare il valore del quoziente. Ed in questa trasformazione consiste la regola generale per dividere qualsivoglia numero per un fratto decimale.

Poniamo in primo luogo che dividendo e divisore abbiano egual numero di cifre decimali; e sia 41,35 da dividersi per 8,27. Essendo il quoziente di una divisione equivalente ad un fratto, di cui il dividendo sia numeratore, ed il divisore denominatore, avremo

$$41,35 : 8,27 = \frac{41,35}{8,27};$$

e poichè il valore di un fratto rimane inalterato, quando numeratore e denominatore vengono moltiplicati per uno stesso numero; così moltiplicando per 100 i due termini dell'ultima espressione, avremo

$$\frac{41,35}{8,27} = \frac{4135}{827};$$

quindi

$$41,35 : 8,27 = 4135 : 827.$$

Perciò: *se una stessa quantità di cifre decimali si troverà nel dividendo e divisore, si toglierà loro la virgola, e la divisione verrà eseguita su due numeri interi.*

Ma se il dividendo avesse più cifre decimali che il divisore, in questo caso si toglierebbe la virgola al divisore, e la si farebbe progredire di altrettanti passi a destra nel dividendo; poichè in questo modo il divisore risulterà un numero intero senza che il quoziente ne venga alterato, essendo stati moltiplicati per uno stesso numero i due termini della divisione. Sia per esempio

$$43,8276 : 9,24.$$

Togliendo la virgola al divisore, questo verrà moltiplicato per 100; e facendola progredire nel dividendo di due passi a destra, avremo moltiplicato anche questo numero per 100. Moltiplicati così i due termini della divisione per uno stesso numero, ne risulterà necessariamente che

$$43,8276 : 9,24 = 4382,76 : 924,$$

divisione che già sappiamo eseguire.

Supponendo in ultimo che il dividendo avesse meno cifre decimali del divisore, non potremmo in questo caso sopprimere la virgola nel divisore, senza moltiplicarlo per numero più grande di quello, per cui sarebbe moltiplicato il dividendo col perdere la sua virgola. Ma poichè alla destra di un decimale si possono aggiungere quanti zeri si vogliono, senza che il valore soffra verun'alterazione, noi cominceremo dall'eguagliare le due quantità di cifre decimali nei due termini della divisione, aggiungendo alla destra del dividendo quel numero di zeri che sarà all'uopo richiesto; indi sopprimeremo le virgole, e non avremo ad operare che su due numeri interi. Così avremo, per esempio,

$$24,7 : 5,31728 = 24,70000 : 5,31728 = 2470000 : 531728.$$

In quest'ultimo caso va compreso quello di un intero da dividersi per un decimale; poichè soppressa la virgola nel divisore, ed aggiunti alla destra del dividendo tanti zeri quante erano le cifre decimali del primo, avremo moltiplicato i due termini della divisione per uno stesso numero, e quindi rimasto inalterato il quoziente. Così sarà

$$8 : 3,261 = 8,000 : 3,261 = 8000 : 3261.$$

CAPO NONO.

Riduzione dei fratti ordinari a decimali.

73. Poichè il calcolo delle frazioni decimali è così facile, quale l'abbiamo osservato nel capo precedente, l'unico mezzo per eliminare le difficoltà che talvolta s'incontrano operando su frazioni ordinarie, sarebbe quello di tradurle in equivalenti espressioni decimali, se ciò potesse farsi sempre esattamente.

Poniamo per primo esempio che si voglia ridurre a forma decimale il fratto $\frac{3}{8}$. Poichè il valore di un fratto equivale al quoziente di una divisione, di cui è dividendo il numeratore e divisore il denominatore, divideremo 3 per 8; e non essendovi

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ 60 & 0,375 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

quoziente intero, porremo uno zero in sua vece. Indi ridurremo le 3 unità a 30 decimi; e questi divisi per 8, daranno il quoziente 3 col residuo 6. Trasformando poi questo primo residuo in centesimi, e l'altro seguente in millesimi, avremo finalmente $\frac{3}{8} = 0,375$.

Operando nello stesso modo, si avrà ancora

$$\frac{7}{25} = 0,28, \quad \frac{31}{80} = 0,3875.$$

74. Le tre frazioni tolte ad esempio, rappresentano altrettanti tipi, a cui si dovranno riferire tutte quelle che si potranno tradurre esattamente in forma decimale. Ed in vero stando la divisibilità in poter sopprimere dal dividendo i fattori primi del divisore, e non potendo esistere alcun fattore comune ai due termini di una frazione ridotta alla forma più semplice, è chiaro che nella riduzione a decimale l'esatta divisione del numeratore pel denominatore non può provenire che dalla moltiplicazione del numeratore per 10, 100, 1000, ec., operata a cagione della sua successiva trasformazione in decimi, centesimi, millesimi, ec. Or moltiplicando il numeratore per 10, 100 ec. non vi si aggiungono altri fattori che 2 e 5; ed in conseguenza col fatto della divisione non si potranno sopprimere che 2 e 5. Questi fattori dunque debbono entrar soli nella composizione del denominatore. Ed in effetto i tre denominatori delle frazioni che abbiamo ridotte a forma decimale, erano $8 = 2.2.2$, $25 = 5.5$, $80 = 2.2.2.2.5$.

Dunque in generale: è riducibile esattamente a decimale ogni fratto che nella sua più semplice espressione ha un denominatore composto di soli fattori 2 e 5, o soli o combinati insieme — Dimodochè indicando con n un numeratore qualunque, ogni fratto riducibile ad un'esatta espressione decimale sarà compreso nella formola generale

$$\frac{n}{2.2...3.5...}$$

E se il denominatore contenesse fattori diversi da 2 e 5, sarebbe necessario per l'esatta riduzione del fratto a forma decima-

le che gli stessi fattori si contenessero ancora nel numeratore. Così riducendo a decimale $\frac{63}{280}$ si troverà che questo fratto corrisponde esattamente a 0,225, poichè il fattore 7 che sta tra quelli del denominatore, si trova ancora nel numeratore 63.

75. La formola qui sopra esposta rende superflua la divisione per ridurre a forma decimale un fratto, il cui denominatore soddisfaccia alla condizione richiesta per un'esatta riduzione. Poniamo che fosse $\frac{13}{40}$ il fratto dato: essendo $40 = 2.2.2.5$, è chiaro che mancano a questo numero due fattori 5, perchè divenga eguale a 1000; e perciò basterà moltiplicare il numeratore 13 per 25 = 5.5, perchè il fratto resti immediatamente trasformato in millesimi. Avremo così

$$\frac{13}{40} = \frac{325}{1000} = 0,325,$$

quale l'avremmo ottenuto per mezzo della divisione.

76. Ogui fratto, che non soddisfaccia ad alcuna delle due condizioni di riducibilità qui sopra assegnate, dovrà necessariamente dar luogo ad una divisione senza fine, non potendo giammai aver-si il residuo 0. E poichè il numero dei residui differenti non può essere illimitato, ma tutto al più eguale al numero delle unità del divisore meno una; così nel progresso dell'operazione dovrà necessariamente ritornare qualcuo dei resti già messi a calcolo, e con esso l'intera serie dei residui consecutivi; vale a dire che dovrà ripetersi qualcuo dei primi quozienti, e con esso quelli che lo seguono. Da ciò il nome di *frazioni periodiche* dato alle traduzioni decimali di questa specie, di cui cecone qualche esempio.

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{7} = 0, 142857\ 142857... & \frac{8}{37} = 0, 216\ 216... \\ \frac{31}{44} = 0, 70\ 4545... & \frac{9}{14} = 0, 6\ 428571\ 428571... \end{array}$$

In questi esempli si osserva che $\frac{1}{7}$ e $\frac{8}{37}$ danno un periodo che comincia dalla 1^a cifra del quoziente, mentre il periodo pren-

de origine dalla 3^a cifra nella traduzione decimale di $\frac{31}{44}$, e dalla 2^a cifra nella traduzione di $\frac{9}{14}$. Quindi le frazioni periodiche si sono distinte in *semplici* e *miste*: è *semplice* la frazione periodica il cui periodo comincia dalla 1^a cifra, e *mista* quella che presenta delle cifre estranee al periodo.

E perchè si possa conoscere, anteriormente al fatto del calcolo, se una data frazione ordinaria, già giudicata irriducibile a decimale esatta, debba risultare periodica semplice o mista, e quale d'altronde sia per essere la quantità di cifre del suo periodo; valgono le due regole seguenti.

I. *Se il denominatore del fratto che si vuol tradurre in decimale, è primo con 10, il periodo comincerà dalla 1^a cifra dopo la virgola, ed avrà un numero di cifre che dividerà esattamente il numero degl'interi più piccoli del denominatore, e primi con esso.*¹

1 Questa regola è una conseguenza del seguente teorema.

Siano N ed A due numeri primi tra loro. Prendendo tra i primi $N-1$ multipli di A tutti quelli che sono primi con N , e dividendo ciascuno di essi per N , saranno residui tutti i numeri interi minori di N e primi con esso.

Sia $N=9$, $A=14$; sarà $N-1=8$. Ed i multipli di 14 compresi tra 1 primi 8, e primi con 9, saranno

$$14.1, 14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 14.8;$$

e ciascuno di questi multipli diviso per 9, dovrà dare un resto primo col divisore. Imperocchè supponiamo che vi potesse essere un resto non primo con 9, ed in conseguenza della forma $3n$, allora chiamando q il quoziente del multiplo $14m$ diviso per 9, avremmo

$$\frac{14m}{9} = q + \frac{3n}{9},$$

e moltiplicando tutto per 9, avremmo

$$14m = 9q + 3n = 3(3q + n);$$

3 dunque sarebbe fattore di $14m$, ciò ch'è impossibile poichè 14 ed m sono supposti primi con 9.

Questi residui saranno inoltre tutti differenti tra loro, poichè se ve ne fosse due eguali, la differenza dei rispettivi dividendi sarebbe divisibile per 9. Ma la differenza di questi dividendi sarebbe uno dei primi 8 multipli di 14; dunque la divisione di due numeri risulterebbe esatta, senza che il dividendo contenesse tutti i fattori del divisore, ciò ch'è impossibile.

Prendendo ad esempio le frazioni

$$\frac{1}{21} = 0,017619\,047\dots, \quad \frac{1}{81} = 0,012345679\,012\dots,$$

osserviamo rispetto alla prima che i numeri interi minori di 21 e primi con esso sono

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20.$$

Questi numeri sono dodici; $\frac{1}{21}$ presenta un periodo di sei cifre, e 6 è divisore esatto di 12 — Similmente si hanno $5\frac{1}{2}$ numeri

Or dovendo i resti esser tutti differenti, e tutti primi con 9, essi saranno costituiti da tutti gl'interi minori di 9 e primi con esso.

Ciò posto, sia $\frac{1}{21}$ la frazione da ridursi a decimale. Prendiamo tra i primi 20 multipli di 10 quelli che sono primi con 21,

$$10.1, 10.2, 10.4, 10.5, \dots\dots\dots 10.20,$$

e dividiamone ciascuno per 21, avremo in un certo ordine i resti

$$1, 2, 4, 5, \dots\dots\dots 20,$$

tutti primi con 21.

Indi moltiplichiamo da una parte tutti i numeri della 1^a linea, da un'altra tutti quelli della 2^a, avremo i due prodotti

$$1.2.4.5\dots\dots 20 \quad \text{e} \quad 1.2.4.5\dots\dots 20.10^k,$$

k disegnando il numero degl'interi minori di 21 e primi con esso. Or il prodotto $1.2.4.5\dots\dots 20.10^k$ è il prodotto di tutti i dividendi, e conterrà in conseguenza un multiplo di 21, più il prodotto di tutti i resti, e l'altro prodotto $1.2.4.5\dots\dots 20$ è precisamente questo prodotto dei resti; quindi sottraendo del 1^o il 2^o prodotto, la differenza sarà un multiplo di 21, vale a dire

$$\frac{1.2.4.5\dots\dots 20.10^k - 1.2.4.5\dots\dots 20}{21} = \frac{1.2.4.5\dots\dots 20(10^k - 1)}{21} = \text{intero.}$$

Ma $1.2.4.5\dots\dots 20$ è un prodotto di fattori primi con 21, e perciò non divisibile per questo numero; dunque $10^k - 1$ sarà un multiplo di 21, vale a dire che 10^k diviso per 21 darà per resto 1. Or nella riduzione di $\frac{1}{21}$ a decimale la 1^a divisione ha dato il resto 1; e la divisione dell'ordine $k+1$, che si ottiene moltiplicando il numero 1 per 10^k dovendo dare il medesimo resto, riprodurrà la 1^a cifra del quoziente, ed in conseguenza farà riconinciare il periodo, il quale dovrà perciò comporsi di k cifre, o di un numero di cifre summultipli di k .

primi con 81 e minori di esso, e 9 che rappresenta la quantità di cifre del periodo nascente da $\frac{1}{81}$, è divisore esatto di 54.

1 Per definire la quantità degl' interi, minori di un dato numero e primi con esso, non è necessario determinarli l'un dopo l'altro per così numerarli: ciò menerebbe sovente a dover scrivere una lunga serie di numeri. Poniamo, per esempio, che si voglia risolvere il problema rispetto al numero $54=2.3.3.3$. Scrivendo la serie naturale

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots, 54,$$

avremo che bisognerà primieramente cancellarne 2 coi suoi multipli, i quali non sono primi con 54. Il loro numero essendo evidentemente $\frac{54}{2}$; resterà della serie naturale la quantità di termini

$$54 - \frac{54}{2} = 54 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 54 \cdot \frac{2-1}{2}.$$

Nella stessa serie naturale estesa da 1 a 54, vi è inoltre 3 con i suoi multipli, che bisogna ancora cancellare, ed il cui numero è $\frac{54}{3}$. Ma di questa serie

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots$$

i termini sottosegnati da un punto sono stati già tolti, ed essi formano la metà dei multipli di 3; quindi il numero dei termini che dovranno effettivamente cancellarsi, sarà

$$\frac{54}{3} - \frac{54}{2.3} = \frac{54}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{54}{3} \cdot \frac{2-1}{2}.$$

Questo numero di termini si dovrà togliere da quelli che sono restati dopo aver cancellato 2 coi suoi multipli: quindi il numero dei termini residui, primi con 54 perchè non avranno per fattore nè il 2 nè il 3, sarà dato da

$$54 \cdot \frac{2-1}{2} - \frac{54}{3} \cdot \frac{2-1}{2} = 54 \cdot \frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{3}.$$

Or 2 e 3 sono i fattori primi di 54; perciò chiamando in generale D il numero dato; $a, b, c, \dots$ i suoi fattori primi, ed N la quantità dei numeri interi, minori di D e primi con esso, avremo

$$N = D \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \dots$$

Applicando questa formola al caso di $D=21$, e $D=81$, avremo pel primo

$$N = 21 \cdot \frac{3-1}{3} \cdot \frac{7-1}{7} = 12,$$

e pel secondo

$$N = 81 \cdot \frac{3-1}{3} = 54.$$

Questa regola poi applicata al caso di un denominatore assolutamente primo mena alla conseguenza, che il numero delle cifre periodiche dovrà dividere esattamente il numero delle unità del divisore meno una. Così negli esempl

$$\frac{1}{7} = 0,142857, \quad \frac{1}{37} = 0,027027\dots,$$

$\frac{1}{13} = 0,07692307\dots$, $\frac{1}{17} = 0,0588235294117617058\dots$, osserviamo che 6, 3, 6 e 16 che esprimono le quantità di cifre dei periodi di $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{13}$ ed $\frac{1}{17}$, sono divisori esatti di $7-1$, $37-1$, $13-1$ e $17-1$.

II. Se il denominatore del fratto da tradursi in decimale, non è primo con 10, il periodo ritarderà di tante cifre dopo la virgola, quanto è il numero dei fattori 2 o 5 che il denominatore avrà comuni con 10 — Così riducendo a forma decimale le frazioni

$\frac{11}{28}$ ed $\frac{53}{104}$, abbiamo

$$\frac{11}{28} = 0,39285714285\dots \quad \frac{53}{104} = 0,509615384615\dots$$

Or il denominatore $28 = 2.2.7$ della frazione $\frac{11}{28}$, la quale presenta due cifre non periodiche, ha due fattori comuni con 10; e tre ve ne sono nel denominatore $104 = 2.2.2.13$ della frazione $\frac{53}{104}$, nella cui equivalente decimale si osservano tre cifre estranee al periodo.

E di questa regola possiamo dare una facile dimostrazione, riguardandola come una conseguenza della prima. Ed in vero moltiplicando per 100 il numeratore della frazione $\frac{11}{28}$, e poi togliendo il fattore 4 comune ai due termini, avremo

$$\frac{1100}{28} = \frac{275}{7} = 39 + \frac{2}{7}.$$

Or $\frac{2}{7}$ deve generare un periodo che comincerà dalla prima cifra dopo la virgola; in conseguenza, quando divideremo per 100 l'espressione decimale equivalente a $\frac{1100}{28}$ affinchè questa frazione ritorni al suo primo valore, il moto della virgola per due

passi a sinistra produrrà l'introduzione di due cifre non periodiche. E similmente, se il denominatore del fratto, come quello di $\frac{53}{104}$, avesse avuto tre fattori 2 o 5 comuni un 10, la loro eliminazione avrebbe richiesto la moltiplicazione del numeratore per 1000; ed in conseguenza per ridurre il fratto al valore primitivo, dopo la riduzione a decimale, sarebbe stato necessario far retrocedere la virgola di tre passi a sinistra, e con ciò introdurre tre cifre estranee al periodo.

CAPO DECIMO.

Riduzione dei fratti decimali ad ordinari.

77. In questa riduzione si presentano tre casi — 1° Una frazione decimale finita — 2° Una frazione periodica semplice — 3° Una frazione periodica mista.

78. Incominciando dal 1° caso, fa d'uopo rammentarsi che un fratto ordinario si traduce in decimale, aggiungendo al suo numeratore quegli stessi fattori 2 o 5 che saranno necessari per trasformare il denominatore in un prodotto di fattori 10. Così osservando che al denominatore 8 della frazione $\frac{3}{8}$ mancano tre fattori 5 per farlo divenir 1000, ne aggiungeremo la stessa quantità al numeratore ed avremo $\frac{7}{8} = \frac{875}{1000}$. In conseguenza se vogliamo ridurre un dato fratto decimale alla forma primitiva di fratto ordinario, farà d'uopo sopprimere per mezzo del massimo divisore comune tutti i fattori aggiunti ai suoi termini dal processo della traduzione decimale. Poniamo per esempio che si voglia operare la riduzione delle frazioni 0,723, 0,2475, 0,472: dopo averle scritte sotto la forma $\frac{723}{1000}$, $\frac{2475}{10000}$, $\frac{472}{1000}$, semplificheremo ciascuna di esse per mezzo del massimo divisore comune dei suoi termini, ed avremo $\frac{29}{40}$, $\frac{99}{400}$, $\frac{59}{125}$.

Ma se la frazione decimale, essendo scritta sotto forma di fratto ordinario, non presentasse altro divisore comune dei suoi ter-

mini che l'unità, allora non si potrebbe riguardare come traduzione di un fratto ordinario: tal'è per esempio 0,37.

79. Passiamo ora al caso di una frazione periodica semplice e sia 0,372 372... Riducendo ad espressioni decimali i fratti ordinari $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, $\frac{1}{9999}$, cc. si hanno i periodi 0,1111... 0,010101... 0,001001... 0,00010001..., cc. Perciò la frazione $\frac{372}{999}$, la quale è 372 volte più grande di $\frac{1}{999}$, dovrà dare un periodo eguale a 0,001001.... moltiplicato per 372, ossia 0,372372... Similmente $\frac{8}{9}$ darebbe il periodo 0,888..., $\frac{3726}{9999}$ darebbe il periodo 0,3726 3726....

Ed in generale: *qualsivoglia frazione periodica semplice equivale ad una frazione ordinaria che abbia il periodo per numeratore ed altrettanti 9 per denominatore.*

80. Se poi la frazione periodica fosse mista, allora si decomporrebbe in un fratto ordinario, ed in un altro periodico semplice. Sia 0,75 489489... la frazione data: facendo progredire la virgola di tanti passi a destra, quante sono le cifre non periodiche, avremo moltiplicata la frazione per 100; e dividendola nello stesso tempo per 100, affinchè ritorni al suo primo valore, otterremo

$$0,75\ 489\ 489.... = \frac{75,489489...}{100}$$

Or le cifre che seguono la virgola in quest'ultima espressione, rappresentano una frazione periodica semplice, il cui valore conosciamo essere $\frac{489}{999}$: avremo dunque

$$0,75\ 489\ 489... = \frac{75 + \frac{489}{999}}{100} = \frac{75,999 + 489}{99900}.$$

Ma $999 = 1000 - 1$; e perciò $75,999 = 75(1000 - 1) = 75000 - 75$. Quindi sostituendo avremo

$$0,75\ 489\ 489... = \frac{75000 - 75 + 489}{99900} = \frac{75489 - 75}{99900}.$$

Dunque: si formerà il numeratore della frazione ordinaria equivalente ad una frazione periodica mista, componendo in un sol

numero la parte non periodica ed il primo periodo, e sottraendone la parte non periodica; il denominatore poi si formerà di tanti 9 quante sono le cifre periodiche, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre non periodiche.

In conseguenza di questa regola avremo

$$\begin{aligned} 0,45\ 729\ 729\dots &= \frac{45729 - 45}{99900} = \frac{45684}{99900} = \frac{423}{925}, \\ 0,648\ 756\ 756\dots &= \frac{648756 - 648}{999000} = \frac{648108}{999000} = \frac{6001}{9250}. \end{aligned}$$

SEZIONE TERZA.

Potenze e radici.

CAPO PRIMO.

Composizione della 2^a e 3^a potenza.

81. Dicesi *potenza* di un dato numero il prodotto di più fattori eguali allo stesso numero.

82. Le potenze si distinguono pel numero dei fattori eguali che le compongono; e prendono perciò gli aggiunti di *seconda*, *terza*, *quarta*, ec. secondo che risultano da due, tre, quattro ec. fattori eguali. Così $25=5.5$ è *seconda potenza* di 5, $343=7.7.7$ è *terza potenza* di 7.

83. Dovendo indicare una certa potenza di un dato numero, non è necessario scrivere il numero tante volte come fattore, per quante ne dovrà esser ripetuto nella composizione della potenza: basterà scriverlo una sola volta, ed indicare con un numero situato alla sua destra ed alquanto superiormente la quantità di volte che dovrà esser ripetuto come fattore. Così 5^3 , 7^4 , 9^8 indicano la 3^a potenza di 5, la 4^a potenza di 7, la 2^a potenza di 9. Il numero destinato ad indicare la quantità dei fattori eguali si chiama *esponente della potenza*.

84. Il fattore costante, da cui risulta la potenza, prende il nome di *radice*; la quale riceve poi gli aggiunti di *seconda*, *terza*,

quarta ec. secondochè il numero considerato come potenza, è riguardato come prodotto di due, tre, quattro, ec. fattori eguali.

85. Il segno $\sqrt{\quad}$ (derivato da *r*, iniziale della parola *radice*) preposto ad un numero, indica che si vuol risolvere in fattori eguali, o in altri termini che se ne vuol estrarre una certa radice. Cercandosi la radice seconda di un dato numero, al segno $\sqrt{\quad}$ non si aggiungerà nessun indice, non essendovi radice di grado inferiore alla seconda; ma la radice 3^a, 4^a, ec. saranno indicate da $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$, ec. Così $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[4]{16}$ indicheranno la radice 2^a di 9, la radice 3^a di 125, la radice 4^a di 16. I numeri 3 e 4 soprapposti a $\sqrt[3]{\quad}$ e $\sqrt[4]{\quad}$, ed il numero 2 sotto-inteso su $\sqrt[3]{\quad}$, si dicono *indici delle radici*.

86. La 2^a potenza prende ancora il nome di *quadrato*, la 3^a potenza dicesi ancora *cubo*; e le rispettive radici prendono poi gli aggiunti di *quadrata* e *cubica*. Questi nomi derivano da teoremi geometrici.

87. Ad ottenere una certa potenza di un dato numero è sufficiente la successiva moltiplicazione del numero per se stesso; volendosi per esempio, la 3^a potenza di 74, si moltiplicherà 74 per se stesso; ed il prodotto 5476 moltiplicato un'altra volta per 74, darà 405224, che sarà il numero richiesto. Ma questo metodo, non dichiarando il modo con cui le unità, decine, centinaia ec. della radice entrano nella composizione della potenza, non offre alcun principio per la soluzione del problema inverso, cioè: *data la potenza e l'esponente, determinar la radice*. Alla soluzione di questo problema serve la teorica seguente.

88. Sia 5+3 un numero composto di due parti, e della cui seconda potenza si vuol conoscere la legge di composizione. Essendo la seconda potenza di un numero il prodotto del numero per se medesimo, avremo

$$(5+3)^2 = (5+3)(5+3).$$

Or per comporre il prodotto $(5+3)(5+3)$ è chiaro che basterà moltiplicare prima 5+3 per 5, poi lo stesso 5+3 per 3, ed in fine addizionare i prodotti. Ma per moltiplicare 5+3 per 5 sa-

rà sufficiente ripetere 5 volte il 5, e 5 volte il 3, dimodochè avremo

$$(5 + 3)3 = 5.5 + 3.5 ;$$

e similmente avremo

$$(5 + 3)3 = 5.3 + 3.3.$$

Quindi addizionando i prodotti delle due moltiplicazioni risulterà

$$(5 + 3)^2 = 5.5 + 3.5 + 5.3 + 3.3 = 5^2 + 2.5 \times 3 + 3^2.$$

Ed essendo 5 la prima parte del numero dato e 3 la seconda, è chiaro che: *la 2^a potenza di un numero, formato di due parti, si compone della 2^a potenza della prima parte, più due volte il prodotto della prima per la seconda parte, più la 2^a potenza della seconda parte.*

Applicando questo teorema ad un numero composto di decine ed unità, avremo che la sua 2^a potenza si formerà del quadrato delle decine, più due volte il prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità. Prendendo ad esempio il numero $37 = 30 + 7$, avremo

$$37^2 = 30^2 + 2.30 \times 7 + 7^2.$$

Consideriamo ancora un numero composto di centinaia, decine ed unità, come 476. Decomponendolo primieramente in decine ed unità, avremo $476 = 470 + 6$; e perciò

$$476^2 = 470^2 + 2.470 \times 6 + 6^2.$$

Ma 470 essendo composto da $400 + 70$, sarà

$$470^2 = 400^2 + 2.400 \times 70 + 70^2 ;$$

e sostituendo quest'ultima espressione di 470^2 in quella di 476^2 , avremo

$$476^2 = 400^2 + 2.400 \times 70 + 70^2 + 2.470.6 + 6^2.$$

Similmente operando sul numero 3847, che ha quattro cifre, troveremo

$$3847^2 = 3000^2 + 2.3000 \times 800 + 800^2 + 2.3800 \times 10 + 10^2 + 2.3810 \times 7 + 7^2.$$

Donde si rileva che in generale: *il quadrato di un numero inte-*

ro qualunque si compone del quadrato della 1^a cifra — più due volte il prodotto della 1^a per la 2^a — più il quadrato della 2^a — più due volte il prodotto della 1^a e 2^a per la 3^a — più il quadrato della 3^a — più due volte il prodotto della 1^a, 2^a e 3^a per la 4^a — più il quadrato della 4^a — ec. conservando però a ciascuna cifra il suo valore di sito. Vale a dire che il quadrato del numero dato sarà la somma di una successione di quadrati e doppi prodotti, tali che i quadrati si comporranno sempre con una cifra significativa, ed i doppi prodotti riuniranno in vece tutte le cifre precedenti.

89. Passando alla 3^a potenza osserviamo che essa risultando dal prodotto di tre fattori eguali, avremo pel numero $5+7$, composto di due parti,

$$(5+7)^3 = (5+7)(5+7)(5+7).$$

Ma per eseguire questa moltiplicazione dovremo comporre primieramente il prodotto $(5+7)(5+7)$, che poi moltiplicheremo per $5+7$; vale a dire che dovremo moltiplicare per $5+7$ il suo quadrato, ed in conseguenza avremo

$$(5+7)^3 = (5^2 + 2.5 \times 7 + 7^2)(5+7).$$

Quest'ultima moltiplicazione si risolve evidentemente in due, l'una

$$(5^2 + 2.5 \times 7 + 7^2)5 = 5^3 + 2.5^2 \times 7 + 5 \times 7^2,$$

e l'altra

$$(5^2 + 2.5 \times 7 + 7^2)7 = 5^2 \times 7 + 2.5 \times 7^2 + 7^3,$$

i cui prodotti addizionati insieme ci daranno

$$(5+7)^3 = 5^3 + 3.5^2 \times 7 + 3.5 \times 7^2 + 7^3;$$

vale a dire che: il cubo di un numero avente due parti, si comporrà del cubo della 1^a parte, più 3 volte il quadrato della 1^a moltiplicato per la 2^a parte, più 3 volte la 1^a moltiplicata pel quadrato della 2^a, più il cubo della 2^a parte.

Applicando questo teorema ad un numero composto di decine ed unità, avremo che il suo cubo sarà formato del cubo delle decine, più tre volte il quadrato delle decine moltiplicato per le uni-

tà, più tre volte le decine moltiplicate pel quadrato delle unità, più il cubo delle unità. Così $84 = 80 + 4$ ci darà

$$84^3 = 80^3 + 3.80^2 \times 4 + 3.80 \times 4^2 + 4^3.$$

Consideriamo ancora il caso di un numero di 3 cifre, e sia di esempio il numero 624 . Decomponendolo in decine ed unità, avremo $624 = 620 + 4$; e perciò

$$624^3 = 620^3 + 3.620^2 \times 4 + 3.620 \times 4^2 + 4^3.$$

E perchè 620 si può riguardare somma di $600 + 20$; sarà

$$620^3 = 600^3 + 3.600^2 \times 20 + 3.600 \times 20^2 + 20^3;$$

quindi sostituendo questo valore di 620^3 in quello di 624^3 , avremo

$$624^3 = 600^3 + 3.600^2 \times 20 + 3.600 \times 20^2 + 20^3 + 3.620^2 \times 4 + 3.620 \times 4^2 + 4^3.$$

E procedendo nello stesso modo troveremo ancora, pel caso di un numero di quattro cifre, che

$$4672^3 = 4000^3 + 3.4000^2 \times 600 + 3.4000 \times 600^2 + 600^3 + 3.4600^2 \times 70 + 3.4600 \times 70^2 + 70^3 + 3.4670^2 \times 2 + 3.4670 \times 2^2 + 2^3.$$

Dunque in generale: il cubo di qualsivoglia numero intero si comporrà del cubo della 1^a cifra — più 3 volte il prodotto del quadrato della 1^a per la 2^a cifra — più 3 volte il prodotto della 1^a pel quadrato della 2^a — più il cubo della 2^a — più 3 volte il prodotto del quadrato della 1^a e 2^a per la 3^a — più 3 volte il prodotto della 1^a e 2^a pel quadrato della 3^a — più il cubo della 3^a — più ec. senza però disgiungere dalle cifre il loro valore di sito. Vale a dire che nella composizione del cubo di un dato numero intero si ha una serie di termini, ordinati nel seguente modo: prima un cubo, poi due tripli prodotti, poi un altro cubo, indi due altri tripli prodotti, ec; i cubi componendosi sempre da una sola cifra significativa, ed i tripli prodotti riunendo tutte le cifre precedenti.

90. La prima quistione da risolversi volendo estrarre la radice sia quadrata, sia cubica (le sole radici di cui si tratta nell'aritmetica) da un dato numero intero, è quella di conoscere la

quantità di cifre che dovrà avere la radice richiesta. Or questa determinazione si ottiene per mezzo della seguente legge.

Elevando a 2^a e 3^a potenza i numeri 1 e 9, 10 e 99, 100 e 999 ec., vale a dire il numero massimo ed il minimo di una certa quantità di cifre, avremo per la 2^a potenza

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 & , & & 10^2 &= 100 & , & & 100^2 &= 10000 \\ 9^2 &= 81 & , & & 99^2 &= 9801 & , & & 999^2 &= 998001 ; \end{aligned}$$

e per la 3^a potenza

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1 & , & & 10^3 &= 1000 & , & & 100^3 &= 1000000 \\ 9^3 &= 729 & , & & 99^3 &= 970299 & , & & 999^3 &= 997002999. \end{aligned}$$

Dai quali esempi si rileva che i numeri 9, 99, 999, ec. che sono massimi tra quelli della stessa quantità di cifre, raddoppiano il numero delle loro cifre nell'elevarsi a quadrato, e lo triplicano nell'elevazione a cubo: al contrario i numeri minimi della stessa quantità di cifre ne hanno nel quadrato il doppio meno uno, e nel cubo il triplo meno due. E poichè ogni numero dato dev'essere necessariamente compreso tra il massimo ed il minimo della stessa quantità di cifre, ne segue che chiamando n in generale la quantità di cifre di un dato numero, il suo quadrato potrà averne $2n$ o $2n - 1$, ed il cubo potrà averne $3n$, $3n - 1$ o $3n - 2$.

91. Esponendo nei n^{ri} 88 e 89 le leggi di composizione del quadrato e del cubo di ogni numero intero relativamente al modo con cui debbono concorrervi le sue diverse cifre, abbiamo detto che bisogna por mente ai loro valori di sito. Or questi valori nella composizione di una potenza seguono una legge semplicissima, la quale ci farà determinare facilmente i limiti tra quali è compreso ogni elemento della potenza, quando dovremo scomporla per ottenerne la radice. Elevando, per esempio il numero 476 a quadrato, e 624 a cubo, avremo

$$476^2 = \left\{ \begin{array}{l} 400^2 = 160000 \\ + 2.400.70 = 360000 \\ \quad + 70^2 = 4900 \\ + 2.470.6 = 3640 \\ \quad + 6^2 = 36 \end{array} \right. , \quad 624^3 = \left\{ \begin{array}{l} 600^3 = 216000000 \\ + 3.600^2.20 = 21600000 \\ + 3.600.20^2 = 720000 \\ \quad + 20^3 = 8000 \\ + 3.620^2.4 = 5612800 \\ + 3.620.4^2 = 29760 \\ \quad + 4^3 = 64 \end{array} \right.$$

6

Ciò che osserviamo su questi due esempi, ha luogo nella composizione del quadrato e del cubo di ogni numero intero, poichè la legge di successione dei diversi ordini di unità, ed il modo con cui esse entrano nella composizione della potenza, sono indipendenti dal valore speciale del numero. Quindi diremo in generale che: *gli elementi successivi di un quadrato o di un cubo¹ vanno continuamente diminuendo di uno zero alla destra, fino a non trovarne alcuno nell'elemento della potenza somministrato dalle unità* — Dimodochè dopo aver determinato il limite inferiore dell'elemento di potenza dato dalla cifra di ordine massimo della radice, i limiti di tutti gli altri elementi si troveranno nella successione delle cifre del numero, considerato come potenza.

92. Dichiarate le leggi della composizione del quadrato e del cubo pei numeri interi facilissima diviene la ricerca di quelle che reggono la composizione delle analoghe potenze delle frazioni, poichè i termini, di cui queste si compongono, non sono che numeri interi. Poniamo che si voglia elevare a quadrato la frazione $\frac{3}{8}$; per la natura di questa potenza avremo

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3.3}{8.8} = \frac{3^2}{8^2}.$$

Similmente per l'elevazione a cubo di $\frac{3}{8}$ avremo

$$\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{3.3.3}{8.8.8} = \frac{3^3}{8^3}.$$

Ed in generale: *per elevare a quadrato od a cubo una frazione, bisognerà elevare alla stessa potenza sì il numeratore che il denominatore.*

Se fosse dato un intero unito a fratto, si ridurrebbe dapprima ad una sola espressione frazionaria, sulla quale poi si opererebbe come fosse una vera frazione. Così

¹ La formola del binomio, ch'esporemo nell'Algebra, ci farà conoscere che questa legge ha luogo, qualunque sia il grado della potenza.

$$\left(7 + \frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{37}{5}\right)^3 = \frac{37^3}{5^3}.$$

Considerando in fine il caso di una frazione decimale, e sia 0,18, avremo

$$\begin{aligned} 0,18^2 &= 0,18 \times 0,18 = 0,0324; \\ 0,18^3 &= 0,18 \times 0,18 \times 0,18 = 0,005832. \end{aligned}$$

Nelle quali due potenze si osserva che il quadrato di 0,18 ha 4 cifre decimali, ed il cubo ne ha 6; vale a dire che il quadrato ha un numero di cifre decimali doppio di quello della radice, ed il cubo ne ha il triplo. Ciò doveva necessariamente risultare dalla legge di moltiplicazione dei fratti decimali, la quale sappiamo (n° 71) che richiede nel prodotto tante cifre decimali quante ne hanno i fattori presi insieme; quindi il numero di queste cifre deve trovarsi duplicato nel quadrato, e triplicato nel cubo.

93. Comparando a qualsivoglia frazione vera le sue diverse potenze, si troveranno tutte minori della radice, e decrescenti di valore a misura che sarà più elevato l'esponente della potenza. Così negli esempi precedenti si trova che $\frac{9}{64}$ quadrato di $\frac{3}{8}$, è minore di questa frazione, e che il suo cubo $\frac{27}{512}$ è minore del suo quadrato $\frac{9}{64}$. Similmente si ha 0,18 maggiore del suo quadrato 0,0324, e questo più grande del cubo 0,005832. Tali risultamenti non sono che casi particolari del principio relativo ai prodotti frazionari esposto nel n° 61-III.

CAPO SECONDO.

Estrazione della radice quadrata.

94. Sia 331776 il numero, di cui si cerca la radice 2^a — La prima quistione da risolversi sarà quella di conoscere quante cifre dovrà avere la radice richiesta. Or dalle leggi di composizione del quadrato (n° 90) sappiamo che la 2^a potenza di un numero intero avrà una quantità di cifre che sarà il doppio di quella della radice, o almeno il doppio meno uno. Avendone il doppio, la quantità di cifre della potenza dovrà esser pari, ed allora prendendone la metà avremo la quantità di cifre della radice. Tal'è il caso del numero proposto: 331776 ha sei cifre; dunque la radice che cerchiamo dovrà averne tre, vale a dire che dovrà esser composta di centinaia, decine ed unità, di cui indichiamo il valore di sito con altrettanti zeri. Quindi dietro la legge del quadrato (n° 88) il numero 331776 dovrà contenere

331776	000
25	576
817	107
749	7
6876	749
6876	6876
0	

— 1° *La seconda potenza delle centinaia* — La cifra delle centinaia essendo seguita da due zeri dovrà averne quattro (n° 27) nel quadrato. Questo primo elemento sarà dunque contenuto nel 33; la cui radice prossima essendo 5, scriveremo questa prima cifra sotto il primo zero a sinistra. Togliendo poi $25 = 5^2$ da 33, avremo il residuo 8 che forma parte dell'elemento che segue.

— 2° *Due volte il prodotto delle centinaia per le decine* — Essendo la quantità di zeri continuamente decrescente di uno negli elementi successivi di una potenza, l'elemento che consideriamo dovrà avere uno zero di meno del precedente, e la cifra 1 del numero dato ne formerà parte; e così il doppio prodotto delle centinaia per le decine sarà contenuto in 81. Quindi se dividiamo questo numero pel doppio delle centinaia già trovate ossia per 10, il quoziente 8 rappresenterà le decine, purchè i riporti na-

scenti dall'addizione degli elementi che seguono, non abbiano accresciuto il doppio prodotto delle centinaia per le decine in modo che il quoziente di 81 diviso per 10 risulti maggiore della cifra richiesta. Perciò sottoporremo il quoziente 8 alla condizione risultante dal seguente elemento della potenza.

— 3° *Seconda potenza delle decine* — La quale dovendo avere uno zero di meno rispetto all'elemento che precede, deve estendersi nelle centinaia del numero dato, e perciò la cifra 7 dovrà scendere a lato di 81. Laonde il quoziente 8 dovrà esser tale che 2 volte le 5 centinaia, ossia 50 decine, moltiplicate per 8 decine, più queste 8 decine elevate a 2^a potenza, compongano un numero che si possa sottrarre da 817. Dovremmo dunque avere

$$2.50.8 + 8^2 \leq 817$$

Ma $2.50.8 + 8^2 = 864$ è più grande di 817; dunque la cifra 8 è maggiore della vera. Sottoponendo in vece 7 alla stessa prova, si troverà soddisfacente; e perciò la scriveremo al posto delle decine della radice. Qui però osserviamo che nell'eseguire questa prova non è necessario calcolare separatamente i due termini del doppio prodotto e del quadrato; poichè si possono comporre con una sola moltiplicazione nel seguente modo. Abbiamo veduto, per esempio, che la cifra 7 per essere esatta deve soddisfare alla condizione

$$2.50.7 + 7^2 \leq 817.$$

Ma

$$2.50.7 + 7^2 = 100.7 + 7^2 = (100 + 7)7 = 107.7.$$

Dunque per l'esperimento della cifra basterà scriverla a destra del doppio della cifra precedente, indi segnarla di nuovo come fattore, ed eseguire la moltiplicazione.

— 4° *Due volte il prodotto delle centinaia e decine per le unità* — Sottraendo da 817 il prodotto $749 = 107.7$, si ha il resi-

Il segno $\leq$ sta in vece dell'espressione *minore o eguale*.

duo 68. A destra di questo numero scriveremo la cifra 7 delle decine della potenza, poichè l'elemento che consideriamo ha uno zero di meno del precedente; e nel numero così ottenuto 687 dovrà contenersi il doppio prodotto delle centinaia e decine per le unità. Basterà dunque dividere 687 per $114 = 2.57$ per avere nel quoziente 6 una prima indicazione delle unità della radice; e poichè la cifra 6 soddisfa ancora all'altra condizione che $2.570.6 + 6^2$ si può sottrarre da 6876, essa è dunque la cifra richiesta.

Sia inoltre 4239481 il numero di cui si cerca la radice quadrata. Questo numero avendo una quantità dispari di cifre, va nella classe di quelli che hanno il doppio delle cifre della radice meno uno. Essendo 7 le sue cifre, 8 rappresenterà il doppio delle cifre della radice, la quale in conseguenza dovrà averne 4; vale a dire che si comporrà di migliaia, centinaia, decine ed unità.

4239481	2059	
4	405	4109
2394	5	9
2025	2025	36981
36981		
36981		
0		

La 2^a potenza delle migliaia essendo seguita da 6 zeri, dovrà contenersi nella prima cifra 4 del numero dato: estraendo la radice 2^a di 4, si ha 2 prima cifra della radice richiesta.

Sottraendo da 4 il quadrato di 2, si ha il residuo zero. Perciò il doppio prodotto delle migliaia per le centinaia dovrebbe esser contenuto nella cifra 2 della potenza; ma questa cifra non essendo divisibile per 4 che rappresenta il doppio delle migliaia, è evidente che mancheranno le centinaia nella radice, e perciò dovremo porre uno zero nel loro luogo.

Mancando le centinaia, mancheranno in conseguenza il doppio prodotto delle migliaia per le centinaia ed il quadrato delle centinaia; passeremo perciò a considerare il doppio prodotto delle migliaia e centinaia per le decine, il quale dovendo esser terminato da 3 zeri comprenderà ancora la cifra 9 del numero dato. E continuando l'operazione come nell'esempio precedente, otterremo l'intera radice 2059.

Gli esempi finora recati, avendoci presentato numeri, che sono

quadrati esatti, si è ottenuto zero dall'ultima sottrazione. Ma se cerchiamo la radice di un numero, come 4528, che non sia un esatto quadrato, avremo 67, più il residuo 39. E se abbiamo scritto 7 per le unità della radice, ciò è dipeso da che 8 dava un numero che non si poteva sottrarre da 928. La vera radice dunque del numero proposto, dovrà esser contenuta tra 67 e 68, vale a dire che differirà da 67 di una quantità minore dell'unità.

$$\begin{array}{r|l} 4528 & 67 \\ 36 & 127 \\ \hline 928 & 7 \\ 889 & 889 \\ \hline 39 & \end{array}$$

Questi residui che si ottengono dalle estrazioni di radici quadrate, debbono soddisfare ad una certa condizione, mancando la quale possiamo esser certi di aver errato nel calcolo. Poniamo per ipotesi che la vera radice di 4528 fosse 68 in vece di 67. Essendo $68 = 67 + 1$; sarà $68^2 = (67 + 1)^2 = 67^2 + 2 \cdot 67 + 1$. Or pel fatto dell'operazione, che ci ha dato il numero 67, noi abbiamo sottratto dal numero dato il quadrato di 67, poichè vi abbiamo tolto il quadrato di 60, più il doppio prodotto di 60 per 7, più il quadrato di 7. Il residuo dell'operazione dovrebbe dunque pareggiare $2 \cdot 67 + 1$. Vale a dire che: *il residuo dell'estrazione di una radice quadrata dev'essere sempre minore del doppio della radice trovata, più uno.*

È facile poi comprendere che non vi sarebbe alcun valore logico nella proposizione inversa, vale a dire: *il calcolo dell'estrazione della radice deve riguardarsi esatto, se il residuo è minore del doppio della radice, più uno*; poichè potrebbero esser avvenuti degli errori che avessero lasciata inalterata questa condizione. Poniamo per esempio che, estraendo la radice da 39982574, risultasse il numero 6401 col residuo 9773. Avremo così 9773 minore di $2 \cdot 6401 + 1$, ed intanto la radice sarebbe falsa, poichè nella 1^a sottrazione, cioè quella di 36 da 39 è incorso l'errore di segnare il residuo 4 in vece di 3. E da questo errore è poi provenuto il numero 6401

$$\begin{array}{r|l} 39982574 & 6401 \\ 36 & 124 \\ \hline 498 & 4 \\ 496 & 496 \\ \hline 22574 & \\ 12801 & \\ \hline 9773 & \end{array}$$

in vece di 6323, ch'è la vera radice per approssimazione del numero dato.

93. Passiamo ora all'estrazione delle radici quadrate dalle frazioni o ni; e sia $\frac{9}{25}$ la frazione proposta. Poichè il quadrato di una frazione si ottiene elevando a 2^a potenza il numeratore ed il denominatore, la sua radice dovrà necessariamente ottenersi estraendola dai due termini di essa; quindi avremo

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}.$$

Questa radice è esatta, perchè quadrati esatti sono i due termini della frazione proposta. Ma se fosse quadrato esatto il solo denominatore, allora non si avrebbe che una radice approssimata.

Sia data per esempio la frazione $\frac{10}{49}$: la radice del numeratore 10 è compresa fra 3 e 4, e la radice del denominatore è esattamente 7; la frazione richiesta sarà dunque compresa fra $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{7}$, vale a dire che avremo

$$\sqrt{\frac{10}{49}} = \frac{3}{7}$$

con un errore minore di $\frac{1}{7}$.

Ma se il denominatore non è quadrato esatto, quantunque lo sia il numeratore, sarà inutile cercare una radice approssimata, poichè non lascerebbe conoscere immediatamente il limite dell'errore. Sia per esempio $\frac{25}{72}$ la frazione data: il numeratore ci dà la radice esatta 5, e quella del denominatore è compresa tra 8 e 9; quindi la radice richiesta starà tra $\frac{5}{8}$ e $\frac{5}{9}$. Or la differenza $\frac{5}{72}$ di queste due frazioni ci presenta il limite dell'errore

sotto una forma incomoda. Lo stesso avverrebbe se neppure il numeratore fosse quadrato esatto: estraendo, per esempio, le radici approssimate dai due termini della frazione $\frac{33}{84}$, si troverà che la radice quadrata di questa frazione dev'essere compresa tra $\frac{6}{9}$ e $\frac{5}{10}$.

Per conoscere agevolmente in questi due ultimi casi il limite di errore, gioverà moltiplicare i due termini della frazione data pel suo denominatore, che in tal modo diverrà un quadrato esatto, senza che il valore del fratto ne venga alterato. Così avremo

$$\sqrt{\frac{25}{72}} = \sqrt{\frac{25.72}{72^2}} = \frac{42}{72} \text{ coll'errore minore di } \frac{1}{72},$$

$$\text{e } \sqrt{\frac{33}{84}} = \sqrt{\frac{33.84}{84^2}} = \frac{52}{84} \text{ coll'errore minore di } \frac{1}{84}.$$

96. Poniamo ancora che sia un intero unito a fratto il numero di cui si cerca la radice 2^a. In questo caso, dopo aver composto l'intero ed il fratto in una sola espressione frazionaria, si procederà come sulle frazioni vere. Sia dato per esempio il numero $7 + \frac{3}{5}$; avremo

$$\sqrt{7 + \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{38}{5}},$$

e poichè il denominatore dell'espressione frazionaria non è quadrato esatto, moltiplicheremo i due termini di essa per 5, ed avremo

$$\sqrt{\frac{38}{5}} = \sqrt{\frac{38.5}{5^2}} = \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$$

coll'errore minore di $\frac{1}{5}$.

97. Consideriamo in fine il caso di una frazione decimale e sia 0,89756. Poichè la 2^a potenza di una frazione decimale ha sempre una quantità di cifre doppia di quella della radice, non potremo riguardare come quadrato il numero proposto, senz'aggiungervi uno zero alla destra, ciò che non altera il valore del decimale.

0,897560	0,947	
81	184	1887
875	4	7
736	736	13209
13960		
13209		
751		

Così la potenza avendo sei cifre, la radice dovrà averne tre, vale a dire che sarà composta di decimi, centesimi e millesimi. Quindi avrà

— 1^o *Quadrato dei decimi* — Il quale essendo dell'ordine dei centesimi, dovrà esser contenuto in 89, la cui radice 9 esprimerà la cifra dei decimi.

— 2^o *Doppio prodotto dei decimi pei centesimi* — Dovendo questo prodotto aver tre cifre decimali, bisognerà scendere la cifra 7 a lato del residuo 8, ottenuto dalla sottrazione di $81=9^2$ da 89. Divideremo dunque 87 per 18 $= 2.9$; e sperimenteremo la cifra 4 del quoziente, sottoponendola alla condizione di dover formare l'altro elemento che segue.

— 3^o *Quadrato dei centesimi* — Il quale avendo quattro cifre decimali, richiederà che si faccia scendere anche la cifra 5. E poichè il prodotto $184.4=736$ si può sottrarre da 875, la cifra 4 sarà quella dei centesimi.

— 4^o *Doppio prodotto dei decimi e centesimi pei millesimi* — Questo prodotto avrà cinque cifre decimali, e perciò la cifra 6 dovrà scendere a lato del residuo dato dalla sottrazione precedente. Divideremo dunque 1396 per 188 $= 2.94$; e metteremo a pruova il quoziente 7 coll'elemento che segue.

— 5^o *Quadrato dei millesimi* — Questo avrà sei cifre decimali, e perciò lo zero ne farà parte. E potendosi da 13960 sottrarre 13209 $= 1887.7$, la cifra dei millesimi sarà il quoziente 7 ottenuto dalla divisione precedente. Ed abbiamo così la radice richiesta 0,947 approssimata a meno di un millesimo.

98. Comparando quest'analisi per l'estrazione della radice quadrata da un decimale a quella seguita per l'analoga operazione sopra un intero, si vedrà chiaramente che esse differiscono nel modo di determinare il limite inferiore di ciascun elemento della potenza. Nell'operazione sull'intero abbiamo definito questo limite calcolando la quantità di zeri da cui dev'esser seguito ogni elemento del quadrato; mentre pel decimale abbiamo in vece calcolato il posto dell'ultima sua cifra a contare dal primo dopo la virgola. Questa differenza deriva necessariamente da quella dei rispettivi sistemi di numerazione, la quale per gl'interi ha un limite inferiore nelle unità di 1° ordine, e pei decimali ha un limite superiore nei decimi. Quindi pei primi il limite inferiore di ciascun elemento del quadrato doveva esser definito per mezzo della sua distanza dalle unità, vale a dire dal numero degli zeri donde è seguito; e pei secondi dalla distanza dell'ultima sua cifra dalla virgola.

CAPO TERZO.

Estrazione della radice cubica.

99. Sia 14348907 il numero, di cui si cerca la radice 3^a. Cominciando dal risolvere la prima questione che si presenta, quale è quella di determinare la quantità di cifre della radice richiesta, osserviamo che il cubo di un numero (n° 90) dovendo avere una quantità di cifre che potrà estendersi dal triplo delle

14348907	243	
8	12	1728
6318	24	216
5824	16	9
524907	1456	174969
524907	4	3
0	5824	524907

cifre della radice al triplo meno due, sarà compreso in una delle tre formole generali $3n$, $3n - 1$, $3n - 2$, secondochè la quantità delle sue cifre sarà divisibile esattamente per 3, o mancherà di una ovvero di due cifre per l'esatta divisione. Il numero proposto avendo 8 cifre, andrà dunque nella formola $3n - 1$; quindi 9

rappresenterà il triplo della quantità di cifre della radice, vale a dire che questa ne avrà 3, e perciò sarà composta di centinaia, decine ed unità, le quali ci facciamo a determinare in conseguenza della legge, con cui esse debbono entrare nella composizione del numero dato. Avremo quindi a considerare

— 1° *La 3ª potenza delle centinaia* — La quale essendo seguita da 6 zeri (perchè risulta dalla moltiplicazione di tre fattori, ciascuno dei quali ne ha due) dovrà esser contenuta in 14; e cercata la radice cubica di questo numero avremo 2, che sarà la prima cifra della radice. Indi sottrarremo 8, ch'è il cubo di 2, da 14 ed avremo il residuo 6.

— 2° *Il triplo del quadrato delle centinaia moltiplicato per le decine* — Questo elemento dovrà avere uno zero di meno del primo, e perciò la cifra 3 del numero dato ne farà parte. Dividendo dunque 63 per 12 che rappresenta il triplo del quadrato delle centinaia, il quoziente 5 rappresenterà la cifra delle decine, dopo aver verificato che essa soddisfa agli altri due elementi che ne dipendono — *triplo delle centinaia pel quadrato delle decine* — e *cubo delle decine*.

Essendo *il triplo delle centinaia pel quadrato delle decine* seguito da 4 zeri ed *il cubo delle decine* da tre, le cifre 4 ed 8 della potenza ne faranno parte, e dovranno scendere a lato del residuo 63. Perciò, ponendo 20 decine in vece di 2 centinaia, la condizione di esattezza della cifra 5 sarà che il numero

$$3.20^3.5 + 3.20.5^3 + 5^3$$

possa sottrarsi da 6348. Or essendo

$$3.20^3.5 + 3.20.5^3 + 5^3 = (1200 + 300 + 25)5$$

si vede chiaramente che potremo sperimentare la cifra 5, scrivendo i tre numeri $12 = 3.2^2$, $30 = 3.2.5$ e $25 = 5^2$ l'uno sotto l'altro, procedendo sempre di un posto a destra, e poi moltiplicarne la somma per 5. Così avremo il numero 7626, il quale essendo maggiore di 6348, ci dimostra che la cifra richiesta dev'essere minore di 5. Ripetuta la stessa pruova sulla cifra 4, la troveremo soddisfacente e quindi la scriveremo al suo posto nella radice.

— 3° *Triplo del quadrato di centinaia e decine, moltiplicato per le unità* — Questo elemento della potenza essendo terminato da 2 zeri, scriveremo la cifra 9 a fianco del residuo dato dalla sottrazione precedente, ed avremo il numero 5249 in cui deve contenersi il prodotto di 3.24^2 moltiplicato per le unità. Fatta la divisione di 5249 per $1728 = 3.24^2$ si ottiene il quoziente 3, col quale componendo il numero

$$3.240^2.3 + 3.240.3^2 + 3^3$$

col metodo abbreviativo di sopra esposto, si ottiene il valore 524907; vale a dire quello che bisognava per l'esattezza della cifra 3, poichè il cubo delle unità non essendo giammai seguito da zeri, il suo limite inferiore sta nelle unità della potenza, e perciò le cifre 07 hanno dovuto scendere a lato di 5249.

100. Ciò che rende laboriosa l'estrazione della radice cubica, è la composizione dei tripli quadrati per la determinazione delle cifre successive: così nell'esempio precedente per ottenere l'ultima cifra 3, dopo aver determinato le cifre 2 e 4, si è dovuto comporre il divisore 3.24^2 . Or la composizione di questi tripli quadrati si può ottenere per mezzo dei numeri già ottenuti nelle operazioni precedenti. Ed in vero essendo $24 = 20 + 4$, avremo

$$3.24^2 = 3(20+4)^2 = 3.20^2 + 2.3.20.4 + 3.4^2;$$

e d'altronde troviamo nella colonna dell'operazione precedente, colla quale si è sperimentata l'esattezza della cifra 4 delle decine,

$$\left. \begin{array}{r} 12 \\ 24 \\ 16 \end{array} \right\} = 1456,$$

vale a dire

$$3.20^2 + 3.20.4 + 4^2 = 1456.$$

Or comparando l'espressione di $3(20+4)^2$ a quest'ultima, troviamo che la prima supera la seconda di $3.20.4 + 2.4^2 = 240 + 2.16$. Ma 240 è la seconda parte della somma fatta nell'operazione precedente, 2.16 è il doppio della terza parte; dunque in generale: *per comporre i tripli quadrati nell'estrazione della radice cubica, bisognerà aumentare la somma ottenuta nell'operazione precedente, della sua 2ª parte e del doppio della 3ª* — Così nell'esempio considerato abbiamo

$$3.24^2 = \begin{array}{r} 1456 \\ 240 \\ 32 \\ \hline 1728 \end{array}$$

Aggiungiamo ancora un esempio di estrazione di radice 3ª, nel quale la pratica e l'utilità di questo metodo sono messe in piena evidenza.

97264338936274	43988			
64	48	6073 (*)	632043 (**)	63424812 (***)
33264	60	1215	11016	110352
27125	25	81	64	64
6139838	5425	619731	63314524	6343584784
5577379	5	9	8	8
561939936	27125	5577379	506516192	50748678272
506516192				
55443764274	(*) 5425	(**) 619731	(***) 63314524	
50748678272	600	12150	110160	
4695086002	50=2.25	162=2.81	128=2.64	
	6073	632043	63424812	

101. Nell'estrazione della radice quadrata abbiamo veduto (n° 94) che il residuo dell'operazione deve soddisfare ad una certa condizione, senza la quale il calcolo non sarà stato esatto: un'analoga condizione vi è per la radice cubica. Cercando il valore di $\sqrt[3]{14349939}$ si troverà 243, più il 1032. Or poniamo che

fosse avvenuto un errore nel calcolo, e che il vero valore della radice fosse $2\frac{1}{4}$. Essendo $2\frac{1}{4} = 2\frac{1}{3} + 1$, sarà

$$2\frac{1}{4}^3 = 2\frac{1}{3}^3 + 3 \cdot 2\frac{1}{3}^2 + 3 \cdot 2\frac{1}{3} + 1;$$

e poichè compiendo il calcolo di estrazione, ci troviamo di aver sottratto dal numero dato il cubo di $2\frac{1}{3}$, il residuo dell'operazione dovrebbe essere eguale o maggiore di $3 \cdot 2\frac{1}{3}^2 + 3 \cdot 2\frac{1}{3} + 1$.

Dunque: *il calcolo di estrazione della radice cubica non sarà esatto, se il residuo dell'operazione non sia minore del triplo quadrato della radice trovata + il triplo di essa + uno.*

102. Passiamo all'estrazione della radice cubica da una frazione; e consideriamo dapprima il caso di una frazione ordinaria. Sappiamo (n° 92) che il cubo di una frazione si ottiene elevando a cubo sì il numeratore che il denominatore; ed in conseguenza la radice cubica di una frazione si avrà estraendola dal numeratore e dal denominatore. Quindi avremo

$$\sqrt[3]{\frac{27}{123}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{123}} = \frac{3}{8}.$$

In questo esempio abbiamo avuto una radice esatta, perchè potenze esatte erano il numeratore ed il denominatore. Ma se lo fosse il denominatore soltanto, si avrebbe una radice approssimata con un noto limite di errore. Così

$$\sqrt[3]{\frac{168}{729}} = \frac{\sqrt[3]{168}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{5}{9}$$

coll'errore minore di $\frac{1}{9}$.

Se poi il denominatore non fosse cubo esatto, qualunque sia il numeratore, bisognerebbe allora (analogamente a ciò che abbiamo osservato rispetto alla radice quadrata) moltiplicare i due termini della frazione pel quadrato del denominatore, affinchè questo divenisse cubo esatto senza che la frazione rimanesse alterata.

Sia data la frazione $\frac{9}{23}$: moltiplicando i suoi termini pel quadrato del denominatore, avremo $\frac{9}{23} = \frac{4761}{23^3}$; quindi

$$\sqrt[3]{\frac{9}{23}} = \sqrt[3]{\frac{4761}{23^3}} = \frac{16}{23}$$

coll'errore minore di $\frac{1}{23}$.

103. Se il numero, di cui si cerca la radice cubica, fosse un intero unito a fratto, allora si comporrebbe in una espressione frazionaria, che verrebbe sottoposta all'operazione come se fosse un vero fratto. Supponendo che si chiedesse la radice cubica di $11 + \frac{3}{7}$, avremmo

$$\sqrt[3]{11 + \frac{3}{7}} = \sqrt[3]{\frac{80}{7}} = \sqrt[3]{\frac{80 \cdot 7^2}{7^3}} = \frac{13}{7} = 2 + \frac{1}{7}.$$

104. Finalmente consideriamo il caso di una frazione decimale e sia 0,778688. Dovendo il cubo di una frazione decimale avere una quantità di cifre tripla di quella della radice, il numero dato dovrà avere una quantità di cifre multipla di 3; e se questa condizione non fosse soddisfatta, si supplirebbe con zeri alle cifre mancanti. Nell'esempio, che ci

facciamo ad analizzare, abbiamo 6 cifre decimali; e perciò la radice cubica dovrà averne due, decimi e centesimi. Avremo dunque a considerare nel numero dato

— 1° *Il cubo dei decimi* — Il quale deve avere 3 cifre decimali perchè risultante dalla moltiplicazione di 3 fattori ciascuno dei quali porta una cifra decimale. Sarà dunque compreso in 0,778, la cui radice 3^a prossima essendo 9, scriveremo questa cifra nel luogo dei decimi. Indi sottrarremo $729 = 9^3$ da 778, e noteremo il residuo 49.

0,778688	0,92
729	243
49688	54
49688	4
0	24844
	2
	49688

— 2° *Il triplo del quadrato dei decimi moltiplicato pei centesimi* — Questo prodotto sarà dell'ordine dei diecimillesimi, poichè nella sua composizione entrano due fattori, ciascuno dei quali ha 2 cifre decimali. La cifra 6 dunque ne farà parte, e perciò la scriveremo a destra del residuo 49. Avremo così il numero 496 in cui si conterrà il triplo del quadrato di 9, moltiplicato pei centesimi della radice. Quindi divideremo 496 per $243 = 3.9^2$, e porremo a pruova la cifra 2 del quoziente; la quale entrando nella composizione del triplo prodotto dei decimi pel quadrato dei centesimi, e del cubo di questi che ha 6 cifre decimali, dovrà soddisfare alla condizione che

$$3.90^2.2 + 3.90.2^3 + 2^3 = 49688$$

si possa sottrarre da 49688, che rappresenta il residuo del numero dato; e poichè questa condizione è adempiuta nel residuo zero, scriveremo 2 nel luogo dei centesimi, e 0,92 sarà la radice cubica esatta del numero proposto.

Or crediamo inutile ripetere in questo luogo ciò che abbiamo detto, all'occasione della radice quadrata dei decimali, sulla ragione del diverso metodo di calcolare il limite inferiore di ciascun elemento del cubo, secondochè il numero proposto è intero, o fratto decimale.

CAPO QUARTO.

Numeri incommensurabili o irrazionali.

105. Cercando la radice 2^a di 14, la radice 3^a di 81, ec. avremo $\sqrt{14} = 3$ col residuo 5, $\sqrt[3]{81} = 4$ col residuo 17, ec. Or se in una divisione, che non dà quoziente esatto in numero intero, si può ottenerlo per mezzo di un fratto unito all'intero; si domanda se nell'estrazione di una radice possa avvenire altrettanto, vale a dire che la radice, la quale non riesce esatta in numero intero, sia per divenir tale mediante l'addizione di un fratto. Chiamiamo in generale N ogni numero di questa specie, n l'indi-

ce della radice, a il numero intero che la rappresenta approssimativamente, e $\frac{b}{c}$ la frazione che supponiamo poterne completare il valore. Avremo in conseguenza

$$\sqrt[n]{N} = a + \frac{b}{c} = \frac{k}{c},$$

$\frac{k}{c}$ rappresentando l'espressione frazionaria alla quale può ridursi la somma $a + \frac{b}{c}$. Elevando alla potenza n le due quantità eguali $\sqrt[n]{N}$ e $\frac{k}{c}$, avremo

$$N = \frac{k^n}{c^n}.$$

Or essendo primi tra loro k e c , quando la frazione $\frac{b}{c}$ sia ridotta, come deve suporsi, alla più semplice espressione, primi tra loro saranno ancora k^n e c^n ; quindi (n° 43) la divisione di k^n per c^n non potrà riuscire esatta, e la relazione $N = \frac{k^n}{c^n}$ è impossibile.

Dunque: *la radice che non può averi esatta in numero intero, non potrà averi tale neppure con intero unito a fratto.*

106. E poichè è impossibile la giusta determinazione delle radici dei numeri, che non sono potenze esatte, gioverà almeno saperne definire il valore fino ad un certo limite di approssimazione, che verrà indicato dalla natura istessa della quistione, per la quale saremo stati condotti alla ricerca di una certa radice. Poniamo per esempio che si voglia $\sqrt{7}$ approssimata fino ad $\frac{1}{30}$.

Essendo $7 = \frac{7 \cdot 30^2}{30^2}$, avremo

$$\sqrt{7} = \sqrt{\frac{7 \cdot 30^2}{30^2}} = \sqrt{\frac{6300}{30^2}} = \frac{79}{30} = 2 + \frac{19}{30}.$$

Or essendo $\sqrt{6300}$ compresa tra 79 e 80, $\sqrt{7}$ sarà compresa tra $\frac{79}{30}$ e $\frac{80}{30}$; vale a dire che $\frac{79}{30}$ differirà di una quantità minore di $\frac{1}{30}$ dal giusto valore $\sqrt{7}$.

Cercando similmente $\sqrt[3]{15}$ approssimata a $\frac{1}{40}$, avremo

$$\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{\frac{15 \cdot 40^3}{40^3}} = \sqrt[3]{\frac{960000}{40^3}} = \frac{98}{40} = 2 + \frac{18}{40}.$$

Ed in generale: per ottenere il numeratore di un'espressione frazionaria che dovrà rappresentare il valore di un radicale approssimato ad un certo limite di errore, bisognerà estrarre la radice dello stesso indice dal prodotto del numero dato per la corrispondente potenza del denominatore del limite.

107. L'applicazione di questa regola alle frazioni ordinarie richiede una certa modificazione. Abbiamo veduto nei n° 95 e 102 come dalle frazioni, i cui denominatori sono potenze esatte della radice richiesta, si ottenga il valore del radicale approssimato ad un certo limite dipendente dal denominatore del fratto dato:

così si ottiene $\sqrt{\frac{7}{25}}$ approssimata ad un $\frac{1}{5}$ e $\sqrt{\frac{71}{343}}$ ap-

prossimata ad $\frac{1}{7}$. Or se per un radicale di questa specie si stabilisse un limite maggiore di quello dato dal fatto dell'operazione, è chiaro che il numero sottoposto al segno radicale non dovrebbe ricevere veruna modificazione. Così $\sqrt{\frac{7}{25}}$ che l'estra-

zione ci dà approssimata ad $\frac{1}{5}$, lo sarebbe tanto più ad un limite maggiore; come $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$. Ma se il limite prestabilito sia minore di quello dato dall'estrazione, allora bisognerà preparare la frazione potenza in modo che senza mutar valore prenda per denominatore la corrispondente potenza del denominatore del limite. Volendo, per esempio, $\sqrt{\frac{7}{25}}$ approssimata $\frac{1}{40}$, bisognerà trasformare il denominatore 25 in $40^2 = (5.8)^2 = 25.64$. Così venendo moltiplicato per 64 il denominatore della frazione data, bisognerà moltiplicarne anche il numeratore, ed avremo

$$\sqrt{\frac{7}{25}} = \sqrt{\frac{7.64}{40^2}} = \frac{21}{40}.$$

Tutto questo suppone che il denominatore della frazione data, già preparato per estrarne la radice, sia divisore esatto della potenza del denominatore del limite; ma se questa condizione non fosse soddisfatta, non si potrebbe ottenere l'approssimazione a quel dato limite, ma ad un altro prossimo, ed anche più piccolo, nel qual caso l'approssimazione richiesta sarebbe implicitamente ottenuta. Poniamo per esempio che si volesse $\sqrt{\frac{2}{7}}$ coll'errore

minore di $\frac{1}{80}$. Il numero 7 non essendo un quadrato, la frazione sarà preparata all'estrazione della radice con moltiplicare per 7 i due termini di essa, e così avremo $\sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{14}{49}}$. Or bisognerebbe trasformare il denominatore 49 in 80^2 ; ma ciò non è possibile, poichè 49 non è divisore di 80^2 . Lo sarebbe in vece di 70^2 , 140^2 , ec. e quindi converrà prendere uno di questi limiti; tra i quali se si scegliesse $\frac{1}{140}$ l'approssimazione richiesta sarebbe pienamente adempiuta, poichè il valore approssimato ad $\frac{1}{140}$, tanto più lo sarà ad $\frac{1}{80}$.

108. La stessa regola, applicata alle frazioni decimali, conduce alla seguente semplicissima preparazione — *Volendosi la radice di un numero approssimata ad n cifre decimali, bisognerà aggiungere alla sua destra 2n zeri pel caso di radice quadrata, e 3n zeri trattandosi di radice cubica* — Ed in vero, quando la radice si vuole approssimata a 0.1, 0.01, ec. bisognerà moltiplicare il numero dato per 100, 10000, ec. se la radice è quadrata; e per 1000, 1000000 ec. se la radice è cubica; vale a dire che volendo l'approssimazione ad 1, 2, ec. cifre decimali, si dovranno aggiungere 2, 4, ec. zeri se la radice è quadrata, e 3, 6, ec. zeri se essa è cubica: ed in generale 2n zeri nel primo caso, e 3n nel secondo, come chiaramente si osserva nei due seguenti esempl.

$\sqrt{2}$			
2,00 00 00	1,414		
1	2 4	281	2824
1 00	4	1	4
96	9 6	281	11296
400			
281			
11900			
11296			
604			

$\sqrt[3]{5}$		
5,000 000 000	1,709	
1	3	86700
4000	21	4590
3913	49	81
87000000	559	8715981
78443829	7	9
8336171	3913	78443829

109. Dalle cose finora dette si potrà rilevare facilmente la ragione, per la quale siano stati chiamati *incommensurabili* o *irrazionali* i valori dei radicali inesatti. Prendiamo ad esempio $\sqrt{2}$; questo numero, approssimato ai centesimi, equivale a 1,41; e così limitato ha 0,01 per misura comune coll'unità, e quindi la *ragione* o rapporto di $\sqrt{2}$ a 1 è quella di 141 a 100. Ma approssimando ad un millesimo lo stesso radicale, il suo valore sarà 1,414; quindi la sua misura comune coll'unità sarà 0,001, e la sua *ragione* alla stessa sarà quella di 1414 a 1000. Dunque progredendo sempre ad un'approssimazione più estesa, la misura di $\sqrt{2}$ comune all'unità sarà sempre più piccola, e la sua ragione all'unità sarà sempre più grande: e poichè è impossibile perveire giammai al vero valore di $\sqrt{2}$, sarà egualmente impossibile definire la vera misura che avrà comune coll'unità e la sua vera ragione alla stessa; vale a dire che $\sqrt{2}$ sarà *incommensurabile*, e perciò *irrazionale*.

CAPO QUINTO.

Metodo per abbreviare il calcolo di approssimazione delle radici.

110. Nell'approssimare per mezzo di decimali il valore di un radicale, il calcolo diviene laborioso, quando l'approssimazione si vuole estendere a molte cifre. Nel capo precedente abbiamo calcolato $\sqrt[3]{5}$ con tre cifre decimali; ma è ben facile comprendere

che volendo spingere l'approssimazione fino alla 12^a cifra, la determinazione delle ultime cifre riuscirebbe assai penosa. Or questa difficoltà di esecuzione può essere agevolmente superata nel seguente modo.

Chiamiamo N il numero, di cui si cerca la radice quadrata ad un certo limite di errore, e $2n+1$ la quantità totale di cifre che dovrà avere la radice. Chiamando a la parte già determinata col metodo ordinario, e che supponiamo di $n+1$ cifre, ed x il numero rappresentato dalle n cifre che restano a determinarsi, avremo

$$\sqrt{N} = a + x, \text{ ed } N = a^2 + 2ax + x^2.$$

Togliendo a^2 dai due membri dell'ultima eguaglianza, si ottiene

$$N - a^2 = 2ax + x^2,$$

e dividendo per $2a$ questi residui, si avrà in fine

$$\frac{N - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}.$$

Or dalle cose premesse si rileva chiaramente che le $n+1$ cifre significative del numero a dovranno esser seguite da n zeri, dimodochè la sua vera quantità di cifre sarà $2n+1$; ed x , componendosi di n cifre, il suo quadrato non potrà averne tutto al più che $2n$. Quindi l'espressione $\frac{x^2}{a}$ avendo al numeratore una cifra di meno che al denominatore, sarà una frazione vera, o perciò sarà $\frac{x^2}{2a} < \frac{1}{2}$. Laonde l'intero, che rappresenta il quoziente $\frac{N - a^2}{2a}$, sarà il valore di x approssimato a meno di un unità dell'ultima cifra. E così conosciute le prime $n+1$ cifre della radice, le rimanenti n cifre si otterranno da una sola divisione.

Prendendo ad esempio $\sqrt{2}$, di cui abbiamo determinato col metodo ordinario le prime quattro cifre 1,414, potremo colla formula precedente calcolarne altre tre. Dall'operazione, che ci ha dato le prime 4 cifre di $\sqrt{2}$, abbiamo ottenuto il residuo 604 che aumentato di 6 zeri, rappresenterà $N - a^2$, poichè pel calcolo eseguito nell'estrazione abbiamo tolto successivamente tutti gli elementi di cui si compone il quadrato di 1,414. Le tre cifre incognite saranno dunque date dal quoziente di 60400000 per

$2828000 = 2a$; e sopprimendo i tre zeri comuni al dividendo e divisore, avremo

$$x = \frac{604000}{2828} = 213 ; \text{ quindi } \sqrt{x} = 1,414213.$$

Una seconda divisione darebbe altre 6 cifre decimali, se fosse noto il residuo che si sarebbe ottenuto estraendo direttamente le prime sette cifre della radice. Or questo residuo sarebbe risultato dalla sottrazione

$$604000000 - (2.1,414000 \times 213 + 213^2),$$

la quale dà il resto 1590631: basterà dunque aggiungere 6 zeri alla destra di questo numero, e poi dividerlo per 2.1,414213, per avere le 6 altre cifre della radice. Così si avrà coll'approssimazione alla 12^a cifra decimale

$$\sqrt{x} = 1,414213562373.$$

Una 3^a divisione aggiungerebbe ancora altre 12 cifre decimali, e ci darebbe

$$\sqrt{x} = 1,414213562373095048801688.$$

111. È d'uopo però osservare che questa regola si trova talvolta in difetto, dando un numero di cifre minore del vero. Poniamo per esempio che si voglia $\sqrt[3]{3}$ con 6 cifre decimali. Dopo aver determinato, come qui a lato, le prime quattro cifre della radice, dovremmo avere le altre 3 dalla divisione del residuo 176 aumentato di 3 zeri per $2.1732 = 3464$. Ma dividendo 176000 per 3464 si ha il quoziente 50, e quindi una cifra di meno della quantità che ne attendevamo.

3	1,732		
1	27	343	3462
200	7	3	2
189	189	1029	6924
1100			
1029			
7100			
6924			
176			

Sarà facile comprendere la cagione di questo difetto, se continueremo l'estrazione col metodo ordinario. Vedremo allora che per determinare la 4^a cifra decimale, dovremmo dividere 1760 per $2.1732 = 3464$. Or il quoziente di questa divisione è zero; e questa è la cifra che manca nel quoziente di 176000 per 3464, poi-

chè il primo dividendo parziale è stato 17600 in vece di 1760. Quindi avremo coll'approssimazione a 6 cifre decimali

$$\sqrt{3} = 1,732050.$$

Dunque la regola generale per questo calcolo di approssimazione dovrà esser formolata nel seguente modo: *trovate le prime $n+1$ cifre di una radice quadrata che deve averne $2n+1$, le rimanenti n cifre si otterranno dividendo il residuo dell'operazione aumentato di n zeri pel doppio della parte già trovata; avvertendo però che il primo dividendo parziale dovrà esser composto dalle cifre del residuo più uno zero.*

112. La stessa regola è ancora applicabile alla radice cubica — Sia N il numero della cui radice composta di $2n+1$ cifre, se ne sono trovate $n+1$ col metodo ordinario, e si cercano le rimanenti n cifre mediante il metodo abbreviativo. Chiamando a la parte nota della radice ed x l'incognita, avremo

$$N = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Togliendo a^3 dalle due quantità eguali, e dividendo i residui per $3a^2$, si avrà

$$\frac{N - a^3}{3a^2} = x + \frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2}.$$

Sappiamo che a si compone di $n+1$ cifre significative seguite da n zeri, ed x non ha che n cifre. Ciò posto sarà facile dimostrare che

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^2} < 1.$$

Primieramente è chiaro che se questa disuguaglianza sarà dimostrata vera pel caso del minimo valore di a e del massimo valore di x , essa dovrà aver luogo necessariamente poi valori intermedi. Facciamo dunque $a = 10000\dots$ ed $x = 9999\dots$; avremo così il minimo valore di a ed il massimo di x . Or un numero composto di n cifre 9 ha il suo quadrato formato di $n-1$ cifre 9, un 8, $n-1$ zeri ed 1; così

$$9999^2 = 99980001.$$

Ed il cubo dello stesso numero sarà formato da $n-1$ cifre 9,

un 7, $n-1$ zeri, un 2 ed n cifre 9'. Serva di esempio

$$9999^2 = 999700029999.$$

Ma a dovendo avere $2n+1$ cifre, nell'ipotesi del suo valore minimo sarà rappresentata da 1 seguito da $2n$ zeri, vale a dire da tanti zeri, quante sono le cifre significative di x^2 supposto massimo; quindi avremo

$$\frac{x^2}{a} = \frac{99...80...1}{100...00...0} = 0,99...80...1.$$

E rispetto alla seconda espressione frazionaria $\frac{x^3}{3a^2}$ osserviamo, continuando sempre nella stessa ipotesi, che a^2 essendo rap-

1 Queste regole per la composizione del quadrato e del cubo di un numero composto di n cifre 9 sono dedotte dal principio semplicissimo che un numero composto di n cifre 9 equivale a $10^n - 1$. Quindi

$$999...^2 = (10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1,$$

e

$$999...^3 = (10^n - 1)^3 = 10^{3n} - 3 \cdot 10^{2n} + 3 \cdot 10^n - 1.$$

E questi risultamenti ci fanno conoscere che per comporre il quadrato di $10^n - 1$ bisogna sottrarre $2 \cdot 10^n$ dalla somma $10^{2n} + 1$. Facciamo $n=4$, avremo

$$\begin{array}{r} 10^8 + 1 = 100000001 \\ - 2 \cdot 10^4 = \quad \quad - 20000 \\ \hline 99980001 \end{array}$$

ed il residuo 99980001 sarà il quadrato di $10^4 - 1$ ossia di 9999. Or se in vece di supporre $n=4$, facessimo $n=3$, $=6$, ec. si avrebbero $5-1$, $6-1$, ec. zeri dopo l'unità del residuo, in vece di $4-1$; verrebbe in seguito la cifra 8, e finalmente $3-1$, $6-1$, ec. cifre 9, in vece di $4-1$.

Similmente pel cubo di $10^n - 1$ abbiamo che bisogna sottrarre dalla somma $10^{3n} + 3 \cdot 10^n$ l'altra $3 \cdot 10^{2n} + 1$. Nella stessa ipotesi di $n=4$, avremo

$$\begin{array}{r} 10^{12} + 3 \cdot 10^4 = 1000000030000 \\ - (3 \cdot 10^8 + 1) = \quad \quad - 300000001 \\ \hline 999700029999 \end{array}$$

E se in vece di $n=4$ poniamo $n=3$, $=6$, ec. avremo alla destra del residuo 3, 6, ec. cifre 9 in vece di averne 4; indi seguirebbe il 2; poi $3-1$, $6-1$, ec. zeri in vece di $4-1$; seguirebbe dappresso un 7, ed in fine vi sarebbero $3-1$, $6-1$, ec. cifre 9 in vece di $4-1$.

presentata da 1 seguito da $4n$ zeri, eccederà di n zeri le $3n$ cifre di x^3 ; vale a dire che

$$\frac{x^3}{3a^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{99..70..299...}{100.....000...} = \frac{1}{3} \cdot 0,00..99..70..299... \\ = 0,0000.....33..23..433...$$

sarà una frazione decimale che avrà n zeri dopo la virgola. In conseguenza la somma

$$\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^3} = \left\{ \begin{array}{l} 0,99..800..1 \\ 0,00..033..23..433.. \\ 0,99..833..33..433.. \end{array} \right. \begin{array}{l} (a) \\ (\beta) \end{array}$$

sarà una frazione vera, poichè le prime n cifre di (a) , che sono $n-1$ 9 ed un 8, corrispondono agli n zeri di (β) che seguono immediatamente la virgola; gli $n-1$ zeri di (a) sono nelle stesse vorticali dello $n-1$ cifre 3 di (β) ; e finalmente la cifra 1 di (a) corrisponde alla cifra 2 di (β) . Non vi può esser dunque ritenuta di somma parziale da doversi aggiungere agli $n-1$ 9 di (a) , o la somma non potrà aver cifre significative superiori ai decimi

Or essendo $\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{3a^3}$ una frazione vera, l'intero contenuto in $\frac{N-a^3}{3a^3}$ sarà il valore di x . Vale a dire che per avere x bisognerà dividere il residuo dell'operazione, aumentato di n zeri, pel triplo del quadrato della parte nota della radice, avvertendo che primo dividendo parziale dovrà esser il residuo aumentato di uno zero. Così dopo aver trovato con quattro cifre decimali

$\sqrt[3]{2} = 1,2803$ col residuo 389439875, volendo spingere l'approssimazione fino all' 8^a cifra decimale si avrà

$$\frac{3894398750000}{3(12803)^2} = 7916;$$

quindi $\sqrt[3]{2} = 1,28037916$.

SEZIONE QUARTA.

Proporzioni, progressioni e logaritmi.

CAPO PRIMO.

Definizioni.

113. *Ragione o rapporto* di due grandezze omogenee è il risultamento della loro comparazione; la quale può farsi determinando o quante volte l'una contiene l'altra, o di quanto l'una eccede l'altra. Il primo modo di determinazione consistendo in una divisione ci dà la *ragione per quoziente* o *geometrica*, dal secondo, ch'è una sottrazione, si ottiene la *ragione per differenza* o *aritmetica*.

114. I due termini di una ragione si distinguono coi nomi di *antecedente* e *conseguente*; *antecedente* in una ragione geometrica è il dividendo, *conseguente* è il divisore; e nella ragione aritmetica è *antecedente* la somma, *conseguente* la parte nota.

115. Le due specie di ragione vengono contraddistinte dai segni delle operazioni per mezzo delle quali sono determinate. Così la ragione geometrica di 9 a 5 sarà indicata con $9:5$, ovvero $\frac{9}{5}$; e la ragione aritmetica di 7 a 4 verrà indicata con $7-4$.

116. La *proporzione* è l'eguaglianza di due ragioni geometriche. Essendo, per esempio, eguali le due ragioni geometriche di 6 a 3 e di 8 a 4, si avrà la proporzione

$$6:3 = 8:4,$$

la quale si legge: *sei sta a tre, come otto sta a quattro*.

Il primo ed il quarto termine di una proporzione si dicono *estremi*, e *medi* il secondo ed il terzo. Così nella proporzione precedente 6 e 4 sono *termini estremi*, 3 ed 8 sono *termini medi*.

117. La proporzione, che costa di quattro termini differenti, si nomina *discreta*; ma se fossero eguali i due termini medi, si direbbe *continua*. La proporzione precedente, per esempio, è una proporzione discreta; ma

$$27 : 9 = 9 : 3$$

è una proporzione continua. Ed il termine unico, che fa da conseguente nel primo rapporto e da antecedente nel secondo, si nomina *medio proporzionale geometrico*.

118. Due ragioni aritmetiche eguali costituiscono un'*equidifferenza*, denominata ancora impropriamente *proporzione aritmetica*. La quale, prendendo ad esempio l'eguaglianza delle due ragioni aritmetiche di 12 a 7 e di 9 a 4, verrà indicata con uno dei due segni seguenti

$$12 - 7 = 9 - 4$$

ovvero

$$12 : 7 : 9 : 4.$$

119. L'*equidifferenza*, egualmente che la proporzione, si distingue in *discreta* e *continua*, secondochè presenta differenti o eguali i due termini medi. Così sarà *discreta* l'*equidifferenza*

$$12 - 7 = 9 - 4$$

e *continua* l'altra

$$12 - 7 = 7 - 2.$$

Ed analogamente alla proporzione continua si dà il nome di *medio proporzionale aritmetico* al termine unico che fa da conseguente nella prima ragione dell'*equidifferenza* continua, e da antecedente nella seconda.

CAPO SECONDO.

Teoremi sulle ragioni e proporzioni.

120. I. *Moltiplicando o dividendo per uno stesso numero i due termini di una ragione geometrica, essa rimarrà inalterata*—Imperocchè potendo la ragione geometrica di due numeri assumere una forma frazionaria, di cui l'antecedente sarà numeratore ed il

conseguente denominatore, essa dovrà rimanere costante, quantunque i suoi termini fossero moltiplicati o divisi per qualsivoglia numero. Così, prendendo ad esempio la ragione di 6 a 5, avremo

$$6 : 5 = \frac{6 \cdot n}{5 \cdot n} = \frac{6:n}{5:n},$$

n indicando un numero qualunque.

II. *In ogni proporzione il prodotto dei termini estremi è eguale a quello dei medi* — Stando ogni proporzione nell'eguaglianza di due ragioni geometriche, potremo indicarla coll'eguaglianza di due espressioni frazionarie. Così la proporzione

$$3 : 5 = 12 : 20$$

può assumere la forma

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}.$$

Or riducendo queste due espressioni frazionarie ad un denominatore comune, avremo

$$\frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{12 \cdot 5}{20 \cdot 5};$$

e due espressioni frazionarie eguali che hanno uno stesso denominatore, dovendo avere numeratori eguali, sarà

$$3 \cdot 20 = 12 \cdot 5.$$

Ma 3 e 20 sono i termini estremi della proporzione data, 5 e 12 ne sono i medi; dunque in ogni proporzione il prodotto dei termini estremi pareggia quello dei medi.

Da questo teorema si deducono i seguenti corollari.

— 1° Essendo eguali i termini medi di una proporzione continua, avremo che in essa il prodotto dei termini estremi sarà eguale al quadrato del medio proporzionale. Così nella proporzione.

$$5 : 20 = 20 : 80$$

avremo

$$5 \times 80 = 20^2$$

— 2° Conoscendo tre termini di una proporzione discreta, se ne

potrà determinare il quarto. Sia data per esempio la proporzione

$$7 : x = 28 : 20,$$

nella quale è ignoto il termine medio x . Dovendo pel teorema, di cui trattiamo, esser soddisfatta l'eguaglianza

$$28.x = 7.20 = 140,$$

potremo riguardare 140 come prodotto dei fattori 28 ed x , dei quali conoscendo il primo, la divisione ci darà il valore del secondo

$$x = \frac{140}{28} = 5.$$

Similmente nella proporzione

$$4 : 3 = 20 : x$$

avremo il valore dell'estremo incognito x , dividendo il prodotto dei termini medi $3.20 = 60$ per 4.

Dunque in generale: *essendo dati tre termini di una proporzione discreta, si determinerà il quarto dividendo il prodotto dei termini estremi pel medio noto, se uno dei medi è incognito; e dividendo il prodotto dei medi per l'estremo noto, se il termine incognito è uno degli estremi.*

— 3° Essendo in una proporzione continua il prodotto dei termini estremi eguale al quadrato del medio proporzionale, ne segue che se questo è incognito, se ne dovrà determinare il valore estraendo la radice quadrata dal prodotto dei termini estremi. Così nella proporzione

$$8 : x = x : 50$$

essendo $x^2 = 8.50 = 400$, sarà $x = \sqrt{400} = 20$.

III. Reciprocamente: *se due prodotti sono eguali, i fattori donde risultano, formeranno una proporzione, della quale i due fattori di un prodotto saranno i termini estremi, ed i fattori dell'altro prodotto ne saranno i medi* — Siano dati i due prodotti

$$3.16 = 4.12.$$

Componendo un terzo prodotto col prendere ad arbitrio un fat-

tore dall'uno dei due prodotti, ed un secondo fattore dall'altro, per esempio 3 dal primo e 4 dal secondo; e dividendo per questo terzo prodotto ciascuno dei due prodotti dati, avremo

$$\frac{3 \cdot 16}{3 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 12}{3 \cdot 4}.$$

Indi togliendo il fattore 3 comune ai due termini della prima frazione, ed il 4 comune a quelli della seconda, ne risulterà

$$\frac{16}{4} = \frac{12}{3},$$

ossia

$$16 : 4 = 12 : 3.$$

Da questo teorema poi deriva che i quattro termini di una proporzione si potranno ordinare in tutti quei diversi modi, che lasceranno costanti i fattori dei prodotti dei termini estremi e dei medi; poichè allora avremo questi prodotti sempre eguali, e perciò ciascun ordinamento dei quattro numeri dati formerà una proporzione. Queste diverse disposizioni sono otto, come si rileva dalla tavola seguente, nella quale si osserva che i prodotti dei termini estremi e dei medi sono costantemente eguali a 48.

$16 : 4 = 12 : 3$	$3 : 12 = 4 : 16$
$16 : 12 = 4 : 3$	$3 : 4 = 12 : 16$
$4 : 16 = 3 : 12$	$12 : 3 = 16 : 4$
$4 : 3 = 16 : 12$	$12 : 16 = 3 : 4.$

Delle quali otto forme differenti essendo data una, facilissima cosa sarà comporre le altre sette. Supponiamo data la proporzione

$$16 : 4 = 12 : 3,$$

ne otterremo la seconda mutando di posto i due termini medi. Indi passando nella prima i conseguenti ad antecedenti e viceversa, avremo la terza; ed in fine mutando di sito i termini medi di quest'ultima, otterremo la quarta. Le quattro altre proporzioni poi contenute nella tavola a destra, non sono che le inverse delle prime.

IV. *Moltiplicando o dividendo per qualsivoglia numero gli antecedenti o i conseguenti di una proporzione, le ragioni ver-*

ranno egualmente alterate, e perciò le quantità resteranno proporzionali — Sia data la proporzione

$$7:4 = 28:12.$$

Potendo darle la forma di due espressioni frazionarie eguali, avremo che moltiplicando per un numero qualunque n o i numeratori o i denominatori delle due espressioni $\frac{7}{4}$ e $\frac{28}{12}$, risulteranno

$$\frac{7n}{4} = \frac{28n}{12}, \text{ e } \frac{7}{4n} = \frac{28}{12n},$$

vale a dire

$$7n:4 = 28n:12 \text{ e } 7:4n = 28:12n.$$

V. *Se quattro quantità sono proporzionali, componendo (vale a dire addizionando gli antecedenti ai rispettivi conseguenti, e poi comparandone le somme ai conseguenti) si avrà una nuova proporzione* — Sia data per esempio la proporzione

$$9:3 = 12:4;$$

si avrà

$$9+3:3 = 12+4:4.$$

Ed in vero avendo aggiunto a ciascun antecedente il suo conseguente, ciascuna ragione (vale a dire il quoziente dell'antecedente pel conseguente) si è aumentata di 1; e poichè erano eguali, tali ancora saranno dopo l'addizione dell'unità, ed in conseguenza si avrà tuttavia proporzione.

VI. *Se quattro quantità sono proporzionali, dividendo (ossia comparando al conseguente l'eccesso che vi ha l'antecedente) si avrà una nuova proporzione* — Prendendo ad esempio la proporzione

$$9:3 = 12:4,$$

si avrà

$$9-3:3 = 12-4:4,$$

poichè sottraendo dagli antecedenti i conseguenti, ciascuna delle due ragioni è diminuita di 1, e la loro eguaglianza non rimane perciò alterata.

VII. *Moltiplicando i termini corrispondenti di due o più pro-*

porzioni, i prodotti formeranno una nuova proporzione — Sia-
no date le tre proporzioni

$$3 : 7 = 9 : 21$$

$$2 : 5 = 4 : 10$$

$$4 : 8 = 3 : 6 ;$$

trasformandole in eguaglianze di espressioni frazionarie, avremo

$$\frac{3}{7} = \frac{9}{21}, \frac{2}{5} = \frac{4}{10}, \frac{4}{8} = \frac{3}{6}.$$

Or moltiplicando da una parte tutte quelle situate a sinistra del
segno =, e dall'altra quelle situate a destra, risulterà necessa-
riamente

$$\frac{3.2.4}{7.5.8} = \frac{9.4.3}{21.10.6},$$

ossia $3.2.4 : 7.5.8 = 9.4.3 : 21.10.6.$

VIII. *Estraendo da tutti i termini di una proporzione la stes-
sa radice, ovvero elevandoli ad una medesima potenza, essi re-
steranno tuttavia proporzionali* — Sia la proporzione

$$3 : 7 = 15 : 35;$$

sarà

$$\frac{3}{7} = \frac{15}{35}.$$

E perciò

$$\left(\frac{3}{7}\right)^n = \left(\frac{15}{35}\right)^n, \text{ e } \sqrt[n]{\frac{3}{7}} = \sqrt[n]{\frac{15}{35}}.$$

Ma sappiamo (n° 92) che la potenza o la radice di una frazione
si ottiene eseguendo su i termini di essa le analoghe operazioni;
avremo dunque

$$\frac{3^n}{7^n} = \frac{15^n}{35^n}, \text{ e } \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{7}} = \frac{\sqrt[n]{15}}{\sqrt[n]{35}},$$

ossia

$$3^n : 7^n = 15^n : 35^n \text{ e } \sqrt[n]{3} : \sqrt[n]{7} = \sqrt[n]{15} : \sqrt[n]{35}.$$

IX. *In una serie di ragioni eguali la somma degli antecedenti,*
8

ti è a quella dei conseguenti come uno degli antecedenti è al suo conseguente — Sia la serie di ragioni eguali

$$3 : 6 = 5 : 10 = 2 : 4 = 7 : 14 = \text{ec.}$$

Essendo ogni conseguente un divisore e la ragione un quoziente, sarà l'antecedente eguale al prodotto del conseguente per la ragione; perciò avremo

$$3 = 6 \cdot \frac{1}{2}, \quad 5 = 10 \cdot \frac{1}{2}, \quad 2 = 4 \cdot \frac{1}{2}, \quad 7 = 14 \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{ec.}$$

Quindi

$$3 + 5 + 2 + 7 + \dots = (6 + 10 + 4 + 14 + \dots) \times \frac{1}{2},$$

$$\text{e} \quad \frac{3 + 5 + 2 + 7 + \dots}{6 + 10 + 4 + 14 + \dots} = \frac{1}{2}.$$

Vi è dunque la stessa ragione $\frac{1}{2}$ tra la somma degli antecedenti e quella dei conseguenti, che tra un antecedente qualunque ed il suo conseguente.

CAPO TERZO.

Teoremi sull'equidifferenze.

121. I. *La ragione aritmetica di due numeri non resta alterata, quando uno stesso numero è aggiunto o tolto sì all'antecedente che al conseguente* — Prendiamo ad esempio la ragione aritmetica $5 - 2 = 3$. L'antecedente 5 essendo somma del conseguente 2 e della ragione 3, è chiaro che non alterando la parte 3, ed aumentando o diminuendo di una data quantità la parte 2, della stessa quantità sarà aumentata o diminuita la somma 5; in conseguenza per una stessa quantità aggiunta o tolta all'antecedente ed al conseguente, vale a dire alla somma e ad una delle sue parti, la ragione, ch'è l'altra parte, dovrà restare inalterata. Quindi troviamo

$$(5 \pm n) - (2 \pm n) = 3$$

II. *In ogni equidifferenza la somma dei termini estremi è eguale a quella dei medi* — Sia l'equidifferenza

$$7 - 2 = 13 - 8.$$

Aggiungendo a ciascuna di queste due quantità eguali la somma $2+8$, avremo

$$7 - 2 + 2 + 8 = 13 - 8 + 2 + 8,$$

ossia
$$7 + 8 = 13 + 2,$$

vale a dire che sarà la somma $7+8$ dei termini estremi eguale alla somma $13+2$ dei medl. Quindi

— 1° Nell'equidifferenza continua la somma dei termini estremi sarà eguale al doppio del medio proporzionale aritmetico. Così nell'equidifferenza

$$13 - 9 = 9 - 5$$

abbiamo
$$13 + 5 = 2 \cdot 9.$$

— 2° Mancando uno dei termini estremi in un'equidifferenza discreta, se ne determinerà il valore, sottraendo dalla somma dei medl l'estremo noto; e mancando uno dei termini medl, si sottrarrà l'altro medio dalla somma degli estremi. Così nelle due equidifferenze

$$9 - x = 14 - 8,$$

$$7 - 3 = 12 - x$$

abbiamo per la prima $x = 9 + 8 - 14 = 3$, e per la seconda abbiamo $x = 12 + 3 - 7 = 8$.

— 3° Mancando il medio proporzionale nell'equidifferenza continua, se ne avrà il valore prendendo la metà della somma dei termini estremi. Per esempio nell'equidifferenza

$$15 - x = x - 3$$

si ha
$$x = \frac{15 + 3}{2} = 9.$$

III. Reciprocamente: se quattro quantità sono tali che la somma di due di esse pareggi la somma delle altre due, le quattro quantità potranno formare un'equidifferenza, di cui le due parti di una somma saranno i termini estremi, e le parti dell'altra somma ne saranno i medl — Sia per esempio

$$5 + 7 = 8 + 4.$$

Prendiamo dalla prima somma il 7 ed il 4 dall'altra, e facciamo-

ne una terza somma che sottrarremo da ciascuna delle somme date: i residui dovendo essere eguali, avremo

$$5 + 7 - 7 - 4 = 8 + 4 - 7 - 4,$$

ossia

$$5 - 4 = 8 - 7.$$

Dal quale teorema poi risulta che un'equidifferenza, egualmente che una proporzione, può avere i suoi termini ordinati in 8 modi differenti.

IV. *Aggiungendo o togliendo una stessa quantità agli antecedenti o conseguenti di un'equidifferenza, i termini resteranno equidifferenti* — Poichè ciascuna delle due ragioni rimarrà aumentata o diminuita di una stessa quantità.

V. *Addizionando i termini corrispondenti di più equidifferenze, le somme saranno equidifferenti* — Sieno date per esempio le due equidifferenze

$$7 - 3 = 6 - 2,$$

$$8 - 5 = 4 - 1.$$

Addizionando da una parte i due primi rapporti, e dall'altra i secondi, avremo

$$(7 - 3) + (8 - 5) = (6 - 2) + (4 - 1),$$

ossia

$$7 + 8 - 3 - 5 = 6 + 4 - 2 - 1.$$

Ma sottrarre successivamente più numeri essendo lo stesso che sottrarre in una sola volta la loro somma, sarà

$$7 + 8 - (3 + 5) = 6 + 4 - (2 + 1);$$

nel quale risultamento sta la dimostrazione del teorema enunciato.

VI. *Moltiplicando o dividendo tutti i termini di un'equidifferenza per un medesimo numero, i prodotti o i quozienti saranno equidifferenti* — Data l'equidifferenza

$$13 - 5 = 10 - 2,$$

è evidente che, chiamando n un numero qualunque, avremo

$$n(13 - 5) = n(10 - 2),$$

e

$$\frac{13 - 5}{n} = \frac{10 - 2}{n}.$$

Or se in vece di moltiplicare per n la differenza $13 - 5$, ne mol-

tiplicassimo soltanto il primo termine, il prodotto $13n$ eccederebbe il vero di $5n$, poichè ciascuna delle 5 unità non tolte da 13 sarebbe ripetuta n volte: quindi l'esatto prodotto di $13 - 5$ per n sarà $13n - 5n$. E nello stesso modo si dimostrerebbe ancora che

$$\frac{13-5}{n} = \frac{13}{n} - \frac{5}{n}. \text{ Dunque avremo}$$

$$13n - 5n = 10n - 2n$$

$$c \quad \frac{13}{n} - \frac{5}{n} = \frac{10}{n} - \frac{2}{n}.$$

122. Cercando tra i teoremi relativi alle proporzioni quelli che sono analoghi ai 6 teoremi che in questo capo abbiamo dimostrato relativamente all'equidifferenza, si troverà che tutte le modificazioni per moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza ed estrazione di radice, le quali lasciano inalterata la proporzione, lasceranno ancora inalterata l'equidifferenza, quando siano trasformate in addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Perciò i teoremi V, VI e IX sulle proporzioni non hanno analoghi nell'equidifferenza.

CAPO QUARTO.

Nozioni fondamentali sulle progressioni.

123. Si dà il nome di *progressione* ad una serie di numeri dedotti l'uno dall'altro mediante un fattore o una differenza costante: nel primo caso la progressione si distingue coll'aggiunto di *geometrica* o *per quoziente*, e nel secondo di *aritmetica* o *per differenza*. Così abbiamo una progressione geometrica nella serie

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, \text{ ec.}$$

ed una progressione aritmetica nell'altra serie

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \text{ ec.}$$

124. Ciascuna delle due progressioni è indicata da un segno speciale. La serie costituente una progressione aritmetica va preceduta dal segno $\div$; ed ogni termine di essa è separato per

mezzo di un punto dall'altro che lo segue: i termini poi di una progressione geometrica sono preceduti dal segno $\div\div$, e separati tra loro da due punti. Quindi le due progressioni precedenti dovranno essere scritte come segue

$$\begin{array}{l} \div\div \quad 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 343 : 729 : 2187 : \text{ec.} \\ \div\div \quad 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . \text{ec.} \end{array}$$

Tanto il fattore costante di una progressione geometrica che la differenza costante di una progressione aritmetica vanno sotto il nome comune di *ragione della progressione*.

125. Le due progressioni si distinguono ancora in *crescenti* e *decrecenti*, secondochè i loro termini vanno aumentando o diminuendo. Così le due progressioni precedenti sono entrambe crescenti; e viceversa sono decrecenti le progressioni

$$\begin{array}{l} \div\div \quad 12 : 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} : \frac{3}{8} : \frac{3}{16} : \frac{3}{32} : \text{ec.} \\ \div\div \quad 10 . 8 . 6 . 4 . 2 . 0 . - 2 . - 4 : \text{ec.}^{\ast} \end{array}$$

A rigore parlando ogni progressione è nel tempo stesso crescente e decrecente, secondo l'ordine di successione nel quale si considerano i suoi termini. Così le due progressioni

$$\begin{array}{l} \div\div \quad \dots\dots\dots \frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \dots\dots \\ \div\div \quad \dots\dots\dots - 7 . - 4 . - 1 . . 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . \dots\dots \end{array}$$

1 Non essendovi necessità di limite nella successione dei termini di una progressione, avviene che una progressione aritmetica decrecente dovrà necessariamente condurre ad una sottrazione impossibile, quando il valore di un termine sia divenuto minore della differenza costante. Così nell'esempio del testo essendo la progressione pervenuta al termine 0, bisognerebbe poter sottrarre 2 da 0, onde avere il termine seguente. Queste sottrazioni impossibili danno origine ai *numeri negativi*.

Poniamo per esempio che si dovesse sottrarre 7 da 2. È chiaro che se 2 avesse 3 unità di più, l'operazione potrebbe eseguirsi; è dunque la mancanza delle 3 unità che la rende impossibile, e ciò si esprime scrivendo

$$2 - 7 = - 5.$$

Questi numeri preceduti dal segno $-$, e la cui genesi sta in una sottrazione impossibile, vanno sotto il nome di *numeri negativi*. E quantunque non siano che simboli, pur tuttavia soddisfano alla legge dei residui, poichè addizionati col sottraendo riproducono il numero dato come somma: così vediamo riprodotta la somma 2 dall'addizione di 7 con $- 5$.

saranno crescenti, considerando la successione dei termini da sinistra a destra; e decrescenti viceversa, se ci faremo a riguardarle in ordine inverso.

Osserviamo ancora che la differenza costante tra i termini di una progressione aritmetica, e che indichiamo in generale colla lettera d (iniziale della parola *differenza*) si troverà continuamente addizionata nell'ordine crescente, e continuamente sottratta nell'ordine decrescente; dimodochè da un termine qualunque a di essa progressione si dedurrà il termine $a + d$ nell'ordine crescente, ed il termine $a - d$ nell'ordine decrescente. Similmente la ragione q di una progressione geometrica crescente, diverrà $\frac{1}{q}$ nell'ordine decrescente.

CAPO QUINTO.

Progressione aritmetica.

126. Tutta la teoria delle progressioni consiste nella soluzione del seguente problema: *determinare la dipendenza che esiste tra le cinque specie di quantità che possiamo considerare in una progressione, vale a dire il primo termine, un termine qualunque, la ragione, il numero dei termini e la loro somma.*

127. Incominciando dalla progressione aritmetica, facciamoci primieramente a cercare in qual modo un termine qualunque di essa progressione dipenda dal 1° termine, dalla ragione e dal posto che occupa. Prendendo ad esempio la progressione

$$— \div — 1 . 5 . 9 . 13 . 17 . 21 . 25 . . .$$

osserviamo ch'essendo il 2° termine 5 eguale al 1° + la ragione 4, ed il 3° termine 9 eguale al 2° + la stessa ragione, sarà quest'ultimo eguale al 1° + 2 volte la ragione. Similmente avremo il 4° termine eguale al 1° + 3 volte la ragione, il 5° eguale al 1° + 4 volte la ragione, ec. Dimodochè la progressione data potrà scriversi sotto la forma

$$— \div — 1 . 1 + 1 . 1 + 4 \times 2 . 1 + 1 \times 3 . 1 + 4 \times 5 . 1 + 1 \times 6 . .$$

che mette in piena evidenza la legge di composizione dei suoi termini. Quindi possiamo dire in generale che un termine qualunque di una progressione aritmetica crescente è eguale al suo primo termine, aumentato del prodotto della ragione pel numero che indica il posto del termine meno uno. Così chiamando u un termine qualunque di una progressione aritmetica crescente di cui a sia il primo termine, d la ragione, ed n il posto del termine u , avremo

$$u = a + d(n-1).$$

Se poi la progressione fosse decrescente, allora per avere il valore del termine u che occupa il posto n , bisognerebbe sottrarre dal 1° termine a il prodotto $d(n-1)$, e si avrebbe $u = a - d(n-1)$.

128. Questa prima relazione $u = a + d(n-1)$ conduce alla soluzione di due problemi.

— 1° *Dato il primo termine di una progressione aritmetica e la ragione, definire il valore del termine che occupa un certo posto, senza dedurlo successivamente dai termini precedenti* — Supponiamo per esempio che si voglia il 51° termine di una progressione, di cui 4 è il 1° termine e 3 la ragione. Facendo nella formola generale $a = 4$, $d = 3$, $n = 51$, avremo

$$u = 4 + 3.50 = 154,$$

che sarà il 51° termine richiesto.

— 2° *Tra due numeri dati inserire quanti altri si vogliano, in modo che tutti facciano una progressione aritmetica* — Siano 7 e 12 i numeri dati: e supponiamo voler inserire tra questi altri 8 in modo che risulti una progressione aritmetica di 10 termini. È chiaro che se fosse nota la ragione di questa progressione, il problema sarebbe risoluto, poichè basterebbe aggiungerne il valore a 7 per avere il 2° termine, e così successivamente tutti gli altri. Chiamando x questa ragione incognita, 12 che dovrà essere il 10° termine della progressione richiesta, ci darà la relazione

$$12 = 7 + 9x.$$

Dalle quali due quantità eguali togliendo 7, avremo

$$12 - 7 = 9x,$$

e dividendo queste ultime per 9, otterremo

$$x = \frac{5}{9},$$

che sarà il valore della ragione. Quindi risulterà la progressione

$$\begin{aligned} & \div 7.7 + \frac{5}{9}.8 + \frac{1}{9}.8 + \frac{6}{9}.9 + \frac{2}{9}.9 + \frac{7}{9}. \\ & 10 + \frac{3}{9}.10 + \frac{8}{9}.11 + \frac{4}{9}.12. \end{aligned}$$

129. Se in una progressione aritmetica, come

$$\div 3.7.11.15.19.23.27.31.35.39.43.47.51 \dots$$

addizioniamo il primo coll'ultimo termine, il secondo col penultimo, il terzo coll'antipenultimo, ec. risulterà una somma costante: così $3 + 51 = 7 + 47 = 11 + 43$, ec. È facile rendere ragione di questo fatto numerico, considerando che se il secondo termine della progressione supera il primo di una certa differenza, il penultimo viceversa è minore dell'ultimo di altrettanto; quindi l'eccesso dell'uno sarà compensato dal difetto dell'altro, e la somma risulterà costante. Questa illazione può dedursi ancora dalla formola generale ch'esprime il valore di un termine qualunque in funzione del primo, della ragione e del posto che occupa. Ed in vero, chiamando a il primo termine di una progressione aritmetica composta di n termini, d la ragione, ed u, u' due termini equidistanti dagli estremi; dimodochè se u occupa il posto m , u' occuperà il posto $n - m + 1$: avremo, applicandovi la formola generale,

$$\begin{aligned} u &= a + (m - 1)d \\ u' &= a + (n - m)d; \end{aligned}$$

in conseguenza

$$u + u' = 2a + (n - 1)d.$$

Vale a dire che la somma dei due termini equidistanti dagli estremi dipende dal primo termine della progressione, dalla ragione e

dal numero dei termini che la compongono, ma non ha dipendenza veruna dai loro posti; quindi per una data progressione, definita ancora nella quantità dei termini, la suddetta somma deve di necessità risultare costante.

Per mezzo di questo teorema riesce facile determinare la somma di più termini di una data progressione aritmetica senza farne direttamente l'addizione. Scritto che avremo i termini della progressione, torniamo a scriverli sotto di essi in ordine inverso; ed avremo così le due progressioni

$$\begin{array}{r} \div \div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27 \cdot 31 \cdot 35 \cdot 39 \\ \div \div 39 \cdot 35 \cdot 31 \cdot 27 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 15 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 3 \end{array}$$

È chiaro che addizionando questi numeri a due a due nelle verticali in cui si trovano, avremo la somma del primo coll'ultimo, del secondo col penultimo, ec.; vale a dire la somma del primo e dell'ultimo ripetuta tante volte per quanti sono i termini. Perciò chiamando a il primo termine della progressione data, u l'ultimo ed n il numero dei termini, avremo la somma delle due progressioni eguale ad $(a+u)n$; e poichè le due progressioni sono eguali, la somma s dei termini di una sarà data dalla relazione

$$s = \frac{(a+u)n}{2}.$$

130. Tutti i problemi che si possono dare intorno alle progressioni aritmetiche si risolveranno per mezzo delle due formole generali che dichiarano le relazioni che debbono aver luogo tra le cinque quantità a , d , n , u , s .

CAPO SESTO.

Progressione geometrica.

131. Prendendo ad esempio la progressione

$$\div \div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458 : \text{ec.}$$

osserviamo ch'essendo il secondo termine eguale al primo moltiplicato per la ragione, il terzo eguale al secondo moltiplicato per

la stessa ragione, e quindi eguale al primo moltiplicato pel quadrato della ragione, ec. potremo scrivere la progressione data nel seguente modo

$$\div \div 2 : 2 \times 3 : 2 \times 3^2 : 2 \times 3^3 : 2 \times 3^4 : 2 \times 3^5 : \text{ec.}$$

E da questa nuova forma rileviamo chiaramente che ogni termine di una progressione geometrica è eguale al primo termine, moltiplicato per la ragione, elevata ad una potenza che ha per esponente il numero rappresentante il posto del termine meno uno. Quindi chiamando a il primo termine della progressione, q la ragione ed u il termine che occupa il posto n^{esimo} , avremo

$$u = a \cdot q^{n-1}.$$

Così volendo il 50° termine della progressione precedente, avremo $u = 2 \cdot 3^{49}$.

Mediante la stessa formola possiamo ancora risolvere il problema d'inserire tra due numeri dati quanti altri si vogliono, in modo che tutti facciano una progressione geometrica. Chiamando N ed N' i numeri dati, x la ragione incognita, n il numero delle medie proporzionali da inserirsi, ed in conseguenza $n+2$ il numero totale dei termini, avremo dalla formola precedente

$$N' = N \cdot x^{n+1};$$

e dividendo queste due quantità eguali per N , risulterà

$$\frac{N'}{N} = x^{n+1},$$

da cui estraendo la radice dell'ordine $n+1$, si avrà in fine

$$x = \sqrt[n+1]{\frac{N'}{N}}.$$

Ponendo $N = 2$, $N' = 54$, $n = 2$, avremo $x = \sqrt[3]{27} = 3$; quindi la progressione

$$\div \div 2 : 6 : 18 : 54.$$

1 Quando n supera 2, il radicale risulta di ordine superiore al 3°. In uno dei capi seguenti vedremo come per mezzo dei logaritmi si ottenga facilmente il valore di una radice di qualsivoglia grado.

Se $\sqrt[n+1]{\frac{N'}{N}}$ risultasse incommensurabile, il problema non potrebbe risolversi che per approssimazione.

132. Chiamando s la somma dei primi 5 termini della progressione

$$\begin{aligned} & \div \div 2 : 2 \times 3 : 2 \times 3^2 : 2 \times 3^3 : 2 \times 3^4 : 2 \times 3^5 : \dots \\ \text{avremo} \quad & s = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4; \end{aligned}$$

e moltiplicando per la ragione 3 queste due quantità eguali, avremo ancora

$$3s = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5.$$

Or sottraendo dalla seconda eguaglianza la prima, risulterà

$$3s - s = 2 \cdot 3^5 - 2,$$

$$\text{ossia} \quad s(3 - 1) = 2(3^5 - 1);$$

le quali due quantità eguali divise per $3 - 1$ ci danno

$$s = 2 \frac{3^5 - 1}{3 - 1}.$$

Quindi chiamando in generale a il primo termine di una progressione, q la ragione, ed n il numero dei termini, di cui si vuole la somma, avremo

$$s = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

133. Quando la progressione sia decrescente, la ragione q sarà una frazione vera, e si potrà prendere n abbastanza grande, perchè la frazione q elevata alla potenza n divenga un numero così piccolo (n° 93) da potersi trascurare rispetto all'unità nel numeratore della formola che dà il valore di s . Così avremo approssimativamente

$$s = \frac{a}{1 - q}.$$

1 Il valore di s , che risulta immediatamente dal supporre q^n una quantità trascurabile; è quello di

$$s = a \frac{-1}{q - 1}.$$

con una differenza dal vero valore tanto più piccola quanto n sarà più grande; dimodochè l'espressione $\frac{a}{1-q}$ rappresenta un limite, al quale la somma continuamente si avvicina a misura che aumenta il numero dei termini addizionati. Prendiamo ad esempio la progressione

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} : \frac{1}{64} : \text{ec.}$$

Abbiamo così $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$; quindi $\frac{a}{1-q} = 2$, che sarà il limite richiesto. Addizionando dunque quanti termini si vogliono della progressione, avremo una somma che avvicinandosi continuamente a 2, non riprodurrà giammai questo numero. Ed in effetto prendendo le somme dei primi 2, 3, 4, 5 termini avremo

$$s = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{4}$$

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{7}{8}$$

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{15}{16},$$

Ma poichè q è minore di 1, avremo $q - 1 = -(1 - q)$; quindi

$$s = a \frac{-1}{-(1-q)}.$$

Or chiamando k il quoziente di -1 diviso per $-(1-q)$, avremo

$$-1 = -(1-q)k;$$

alle quali due quantità eguali aggiungendo la somma $1 + (1-q)k$, risulterà

$$(1-q)k = 1,$$

donde

$$k = \frac{1}{1-q};$$

ed in conseguenza

$$\frac{-1}{-(1-q)} = \frac{1}{1-q}.$$

Quindi

$$s = a \frac{-1}{q-1} = a \frac{-1}{-(1-q)} = a \frac{1}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

ed in generale prendendo la somma dei primi n termini, avremo

$$s = 1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}},$$

la quale differirà sempre da 2 di $\frac{1}{2^{n-1}}$.

CAPO SETTIMO.

Teoria dei logaritmi..

134. Scriviamo l'una sotto dell'altra due progressioni, l'una geometrica e l'altra aritmetica, di cui la prima cominci da 1 e la seconda da 0: abbia la prima una ragione qualunque, purchè diversa dall'unità; e 1 sia in vece la ragione della seconda. Avremo così le due progressioni

$$\begin{array}{r} \div \div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 \dots (a) \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 \dots (b) \end{array}$$

Essendo l' n^{esimo} termine di una progressione geometrica espresso da $a \cdot q^{n-1}$ (n° 132), avremo per l' n^{esimo} termine di (a) il valore

$$1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Similmente applicando alla progressione (b) la formola $a + (n-1)d$ che dà il valore dell' n^{esimo} termine di una progressione aritmetica, avremo

$$0 + (n-1) = n-1.$$

E comparando le due espressioni da cui risultano i valori dei termini n^{esimi} delle due progressioni, si vede che esse hanno la seguente proprietà: ogni termine della progressione aritmetica è eguale all'esponente della ragione nel termine corrispondente della progressione geometrica — I termini dunque della progressione aritmetica numerano la quantità dei fattori eguali alla ragione, che compongono i termini della progressione geometrica, e perciò i primi vengono detti *logaritmi* (di ragione numeri) dei secondi. Così abbiamo 2 esser logaritmo di 4, 3 di 8, 5 di 32, ec.

135. Poichè il valore della ragione è arbitrario nella progressione (a), poniamovi 3 in vece di 2, ed avremo le due progressioni

$$\begin{array}{l} \div \div 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 \dots \\ \div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 \dots \end{array}$$

Nelle quali 2 non è più logaritmo di 4 ma di 9, 3 è logaritmo di 27 in vece di esserlo di 8, ec. Uno stesso logaritmo dunque potrà appartenere ad un'infinità di numeri, ed in conseguenza uno stesso numero potrà avere infiniti logaritmi, a norma che varierà il secondo termine della progressione geometrica, il quale ha ricevuto perciò il nome di *base*. E poichè qualunque ne sia il valore vi corrisponderà sempre il termine 1 della progressione aritmetica, il cui primo termine 0 corrisponderà costantemente al termine 1 della progressione geometrica; in conseguenza: *qualunque sia la base di un sistema di logaritmi, sarà sempre 1 il logaritmo della base, e 0 quello dell'unità.*

136. Ponendo per base un numero maggiore dell'unità, ¹ ed immaginando prolungate all'infinito sì a destra che a sinistra le due progressioni, avremo

$$\begin{array}{l} 0 \dots\dots\dots \frac{1}{16} : \frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 \dots\dots\dots (c) \\ -\infty \dots\dots\dots -4 . -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 \dots\dots\dots (e) \end{array}$$

da cui chiaramente derivano i seguenti corollari — 1° I numeri negativi non possono avere logaritmi, poichè tutti i modi di essere dei numeri, dall'infinito negativo all'infinito positivo, si trovano adoperati come logaritmi dei numeri positivi estesi da 0 a ∞ — 2° Che i logaritmi delle frazioni vere sono negativi, e rappresentati da un valore assoluto tanto più grande, per quanto la frazione è più piccola, dimodochè 0, ch'è limite delle frazioni decrescenti, ha per logaritmo $-\infty$.

137. Nelle stesse due progressioni (c) ed (e), consideriamo due termini u ed u' che occupano i posti n ed n' nella progressione

¹ Prendendo viceversa per base un numero minore dell'unità, tutte le frazioni avrebbero positivi i loro logaritmi, ed i numeri maggiori dell'unità li avrebbero negativi.

geometrica, ed i termini corrispondenti v e v' della sottoposta progressione aritmetica. Avremo

$$u = 2^{n-1}, \quad u' = 2^{n'-1};$$

quindi il loro prodotto

$$u \cdot u' = 2^{n+n'-2}$$

occuperà il posto $n + n' - 1$.

Similmente avremo per i termini corrispondenti della progressione aritmetica

$$v = 0 + n - 1, \quad v' = 0 + n' - 1;$$

quindi

$$v + v' = n + n' - 2.$$

La somma dunque $v + v'$ sarà un termine della progressione aritmetica, e corrisponderà al termine $u \cdot u'$ della progressione geometrica, poichè al pari di questo occupa il posto $n + n' - 1$. In conseguenza $v + v'$ sarà il logaritmo di $u \cdot u'$; ma $v + v'$ è la somma dei logaritmi dei fattori u ed u' ; dunque: *il logaritmo di un prodotto è eguale alla somma dei logaritmi dei fattori* — Così prendendo nella progressione (c) i due termini 2 ed 8, abbiamo $2 \cdot 8 = 16$, a cui corrisponde il logaritmo $4 = 1 + 3 = \log. 2 + \log. 8$.

Da questo primo teorema a modo di corollari derivano gli altri tre che seguono.

Il logaritmo di un quoziente è eguale al logaritmo del dividendo meno quello del divisore — Chiamando a il dividendo, b il divisore e q il quoziente, pel teorema precedente avremo

$$\log.a = \log.b + \log.q,$$

donde

$$\log.q = \log.a - \log.b.$$

Il logaritmo di una potenza è eguale al logaritmo della radice, moltiplicato per l'esponente della potenza — Sia a la radice, n l'esponente e P la potenza; avremo

$$P = a \cdot a \cdot a \cdot a \dots = a^n;$$

quindi pel primo teorema sarà

$$\log.P = \log.a + \log.a + \log.a + \dots = n \cdot \log.a.$$

Il logaritmo di una radice è eguale al logaritmo della potenza, diviso per l'indice della radice — Ciò è evidente pel teorema che precede.

138. Parecchi matematici ¹ avevano veduto queste proprietà delle due progressioni (a) e (b) prima che Giovanni Nepero (Napier), barone scozzese, avesse pensato di trarne un'utilità pratica, facendole servire ad una stupenda abbreviazione dei calcoli aritmetici. Immaginiamo una progressione geometrica i cui termini abbiano differenze così piccole che i numeri 1, 2, 3, 4, 5, ec. della serie naturale vi trovino il loro posto; allora, scrivendovi al di sotto i termini di una conveniente progressione aritmetica, ogni numero della serie naturale avrà il suo corrispondente logaritmo. Quindi per ottenere il prodotto di due numeri, basterà addizionare i corrispondenti logaritmi, cercare il luogo che la loro somma occuperà nella progressione aritmetica, ed il termine corrispondente della progressione geometrica ci darà il prodotto richiesto. La moltiplicazione sarebbe così ridotta ad una semplice addizione; e pei teoremi precedenti è facile comprendere come dalla moltiplicazione avremmo l'elevazione a potenza, dalla sottrazione il quoziente, e dalla divisione l'estrazione delle radici di qualunque grado. I calcoli più laboriosi verrebbero così trasformati in operazioni semplicissime, ed il metodo dei logaritmi sarebbe uno dei giù grandi ritrovati dell'ingegno umano.

Nepero seppe attuare questo ardito concetto, e nel 1614 egli pubblicava la sua grande scoperta sotto il titolo: *LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTIO, SEU ARITHMETICARUM SUPPUTATIONUM MIRABILIS ABBREVIATIO*, ec.

139. Il modo con cui Nepero concepiva la costruzione del canone logaritmo, rispondeva appieno allo scopo ch'egli si era prefisso, qual'era quello di rendere più brevi i calcoli trigonometrici. Ma egli aveva compreso del pari che la base 10, in vece di 2, 71828... ch'era quella del suo sistema, ² sarebbe stata da pre-

¹ Vedi MONTUCLA — *Histoire des Mathématiques*, tom. II. n° III.

² Il primo concetto da cui partì Nepero per la composizione di un canone logaritmico, fu quello d'immaginare due mobili, che chiamiamo P e Q, moventisi

ferirsi nell'applicazione dei logaritmi all'aritmetica comune. Er-rico Briggs, che in quel tempo professava Matematica nel Colle-gio di Gresham, e che fu uno dei primi in ammirare il grande ritrovato del geometra scozzese, s'incontrò nella stessa idea di

per due rette parallele, il primo con una velocità proporzionale alla distanza in cui si trovava da un punto p giacente sulla sua linea, e l'altro con velocità costante.

Prendendo sulla retta percorsa dal mobile P delle distanze dal punto fisso p crescenti in progressione geometrica s, ns, n^2s, n^3s ; ec., è chiaro che le loro differenze $s(n-1), ns(n-1), n^2s(n-1)$ formeranno ancora una progressione geometrica, i cui termini (come è facile dedurre dai principi della Meccanica razionale) saranno percorsi in tempi eguali. Ma in tempi eguali il mobile Q percorre spazi eguali; dunque mentre gli spazi percorsi da P seguiranno una progressione geometrica, quelli descritti da Q aumenteranno in progressione aritmetica: i secondi dunque saranno logaritmi dei primi.

Poniamo inoltre che ad un certo istante del loro moto P e Q abbiano eguali velocità, e facciamo $= 1$ la distanza che allora separerà il mobile P dal punto fisso p . È chiaro che per un tempo indivisibile, immediatamente successivo a quell'istante, P conserverà la stessa velocità e percorrerà uno spazietto che chiamiamo ω , ed un altro eguale ne sarà eziandio percorso da Q nel medesimo tempo. Dimodochè mentre le distanze di P da p formano la progressione

$$\div 1 + \omega : (1 + \omega)^2 : (1 + \omega)^3 (1 + \omega)^n,$$

gli spazi descritti da Q formeranno l'altra progressione

$$\div \omega . 2\omega . 3\omega n\omega.$$

Dato ad ω un valore assai piccolo rispetto a 1, e sia quello di un diecimilio-nesimo; per determinare quello di $n\omega$, corrispondente ad un certo termine $(1 + \omega)^n$ della serie naturale, Nepero procedeva nel seguente modo. Facendo primieramente $(1 + \omega)^n = 2$, egli inseriva (mediante una successiva estrazio-ne di radici quadrate da 2) tante medie proporzionali tra 1 e 2 che quella che seguiva immediatamente 1, non la superasse di una quantità maggiore di un diecimilionesimo: così trovava che il numero delle medie proporzionali era di 6 931472. Questo numero rappresenta n ; quindi $n\omega = 0,6931472$ è il logarit-mo di 2 — Egli è facile comprendere in qual modo, seguendo lo stesso meto-do, fossero determinati i logaritmi degli altri numeri.

Or se in vece di ω , si ponesse un suo multiplo qualunque $M\omega$ per primo ter-mine della progressione aritmetica, questa diverrebbe

$$\div M\omega . 2M\omega . 3M\omega nM\omega,$$

e l'utilità di questi nuovi logaritmi sarebbe la stessa. Quindi vi possono essere

una base decimale; e dall'inventore dei logaritmi ebbe conforto ad intraprendere l'arduo lavoro della costruzione delle tavole sulla base 10. Quindi abbiamo due sistemi differenti di logaritmi; l'uno è quello dei *logaritmi neperiani* o *iperbolici*, l'altro è dei *logaritmi volgari, decimali* od anche di *Briggs*.

140. Esiste purtuttavia tra i due sistemi una relazione per mezzo della quale si può calcolare il logaritmo di un numero in uno dei sistemi, quando ne sia dato il valore nell'altro. Rappresenti N un numero, di cui sia dato il logaritmo neperiano n , e si cerca il suo logaritmo decimale n' . Chiamando e la base del sistema neperiano, avremo per la definizione dei logaritmi ($n^o 134$)

$$N = e^n.$$

tanti sistemi di logaritmi, per quanti valori si possono dare ad M . Questo numero è chiamato il *modulo* del sistema, e quello di Nepero è caratterizzato dall'essere $M=1$.

Da ciò deriva che per avere il modulo di un dato sistema basta dividere M^o per ω , ossia il logaritmo di un numero, che eccede l'unità di una piccolissima frazione, per lo stesso numero meno l'unità. Questo logaritmo è facile a calcolarsi, quando è data la base del sistema: così in quello di Briggs essendo 1 il logaritmo di 10, da un lato divideremo successivamente 1 per 2, dall'altro estrarremo continuamente delle radici quadrate da 10, finchè ne otterremo una della forma $1 + \omega$, in cui ω sia una frazione piccolissima. Avremo così da un lato il valore di ω , dall'altro il logaritmo di $1 + \omega$; quindi una semplice divisione ci darà $M=0,43429\ 44819\ 03251\ \dots$ ch'è il modulo del sistema di Briggs.

Questo esempio ci dimostra che quando è data la base di un sistema logaritmico, è ancora definito il modulo. E viceversa quando questo sia dato, lo sarà anche la base. Abbiamo nel sistema di Nepero $M=1$, ossia

$$\frac{\omega}{(1 + \omega) - 1} = 1. \text{ Chiamando } b \text{ la base di questo sistema,}$$

$$\text{avremo} \quad 1 + \omega = b^{\omega},$$

$$\text{quindi} \quad b = (1 + \omega)^{\frac{1}{\omega}},$$

che svolto colla formola del binomio, dopo aver dato ad ω un valore piccolissimo, ci darà

$$b = 2,71828\ 18284\ \dots$$

Prendendo i logaritmi decimali di queste due quantità eguali, avremo

$$n' = \log.e^n = n.\log.e.$$

Basterà dunque moltiplicare i logaritmi neperiani pel logaritmo decimale di e per avere i corrispondenti logaritmi nel sistema di Briggs. Al fattore costante, pel quale fa d'uopo moltiplicare i logaritmi neperiani per ottener quelli corrispondenti ad un altro sistema, si è dato il nome di *modulo del sistema*. Così il modulo del sistema di Briggs è il logaritmo decimale della base e , ossia 0,43429 44819... E viceversa per tradurre i logaritmi decimali in neperiani, basterà moltiplicare i primi per

$$\frac{1}{0,43429\ 44819...} = 2,30281\ 53517...$$

141. L'utilità della base 10 nell'applicazione dei logaritmi al calcolo numerico deriva dai due seguenti teoremi che appartengono esclusivamente al sistema di Briggs.

1. *Il logaritmo di un numero intero conterrà tante unità, quante sono le cifre del numero meno una* — Dando alle due progressioni (a) e (b) la forma conveniente al sistema di Briggs, avremo

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \end{array} 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 \text{ ec.}$$

$$\begin{array}{c} \div \\ \div \end{array} 0.1.2.3.4.5 \text{ ec.}$$

Saranno dunque 0, 1, 2, 3 ec. i logaritmi di 1, 10, 100, 1000 ec. Quindi i numeri compresi tra 1 e 10, vale a dire tutti i numeri di una cifra, dovranno avere per logaritmi numeri maggiori di 0 e minori di 1, ossia della forma $0 + \text{frazione}$. Similmente i numeri di due cifre, ossia compresi tra 10 e 100, avranno i logaritmi della forma $1 + \text{frazione}$; quelli di tre cifre li avranno espressi da $2 + \text{frazione}$. Ed in generale il logaritmo di un numero di n cifre avrà la forma $n - 1 + \text{frazione}$.

Dietro questa relazione che la parte intera di un logaritmo ha colla quantità di cifre del numero corrispondente, si è dato alla prima il nome di *caratteristica*. La quale in conseguenza sarà nota, quando sia data la quantità di cifre del numero; così sarà 7 la caratteristica che avrà il logaritmo del numero 72 546 897, il quale ha 8 cifre. E viceversa essendo data la caratteristica di un

logaritmo, sarà data ancora la quantità di cifre del numero corrispondente: così al logaritmo 8, 475 697 dovrà corrispondere un numero la cui parte intera avrà 9 cifre.

In conseguenza della relazione che la caratteristica di un logaritmo ha colla quantità di cifre del numero corrispondente, si può definire il valore minimo di un numero incognito, la cui determinazione diretta riuscirebbe laboriosa. Poniamo che si volesse conoscere a quanti ducati equivalga la somma di un grano al giorno a duplicare per un mese, vale a dire che si debba pagare 1 grano nel 1° giorno, 2 nel 2°, 4 nel 3°, e così di seguito. È chiaro che il valore richiesto sarà la somma dei primi 30 termini della progressione

$$1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 \text{ ec.}$$

Applicandovi la formola $s = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$, avremo $s = \frac{2^{30} - 1}{2 - 1} = 2^{30} - 1$. Or il logaritmo di 2^{30} sarà dato da $30 \log. 2$; e poichè $\log. 2 = 0, 30103$, sarà $30 \log. 2 = 9, 03090$. Il numero corrispondente avrà 10 cifre, e la sua 100^a parte (per convertire le grana in ducati) ne avrà 8, vale a dire ch'esprimerà decine di milioni. Basta la conoscenza di questo limite per togliere la voglia, a chi ne avesse, di concretare il problema.

II. *Moltiplicando o dividendo un numero per qualsivoglia potenza di 10, la frazione decimale del suo logaritmo resterà invariata* — Prendiamo ad esempio il numero 104 827, il cui logaritmo è 5, 02047316. Dividendolo per 10, 100, 1000, ec. avremo i quozienti

$$10482,7 \quad | \quad 1048,27 \quad | \quad 104,827 \quad | \quad \text{ec.}$$

i quali avranno i loro logaritmi espressi da

$$\log. 104827 - \log. 10, \quad \log. 104827 - \log. 100,$$

$$\log. 104827 - \log. 1000, \text{ ec.}$$

ossia

$$\begin{array}{r} 5,02047316 \\ - 1 \\ \hline 4,02047316 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 5,02047316 \\ - 2 \\ \hline 3,02047316 \end{array}, \quad \begin{array}{r} 5,02047316 \\ - 3 \\ \hline 2,02047316 \end{array}.$$

Quindi se dato il logaritmo di un numero, vogliamo cercare quello dello stesso numero moltiplicato o diviso per 10^n , basterà aggiungere o sottrarre n unità alla caratteristica del logaritmo dato.

142. Prima di terminare questo capo vogliamo dare un'idea del modo, con cui si potrebbe calcolare una tavola di logaritmi. Supponiamo che si voglia $\log.2$ approssimato a 5 cifre decimali. Stando alla definizione dei logaritmi, bisognerebbe inserire tante medie proporzionali geometriche tra 1 e 10, finchè se ne ottenesse una che differisse da 2 di una quantità considerata come trascurabile. Ciò importerebbe una lunga serie di estrazioni di radici quadrate; ed un'operazione consimile dovendosi ripetere per ogni numero primo ¹ compreso tra i limiti della serie naturale, a cui si vuol estendere la composizione della tavola, è facile comprendere che un simile calcolo sarebbe ineseguibile. Componiamo in vece una tavola, come qui appresso, nella quale siano da un lato le radici quadrate successive di 10, e dall'altro i corrispondenti logaritmi.

Radici successive di 10.

A = 3,162278
B = 1,778279
C = 1,333521
D = 1,154782

E = 1,074608
F = 1,036633
G = 1,018152
H = 1,009035

I = 1,004507
K = 1,002251
L = 1,001125
M = 1,000562

Logaritmi.

a = 0,5
b = 0,25
c = 0,125
d = 0,0625

e = 0,03125
f = 0,015625
g = 0,0078125
h = 0,00390625

i = 0,001953125
k = 0,0009765625
l = 0,00048828125
m = 0,000244140625

¹ I logaritmi dei numeri non primi si ottengono addizionando quelli dei loro fattori primi.

In questa tavola A è la radice quadrata di 10, B è la radice quadrata della radice quadrata di 10, e così di seguito; ed essendo 1 il logaritmo di 10, sarà $\frac{1}{2} = 0,5$ il logaritmo di $\sqrt{10}$, $\frac{1}{4} = 0,25$ quello di $\sqrt{\sqrt{10}}$, ec.

Ciò posto, essendo 2 compreso tra A e B, dividiamo 2 pel minore dei due numeri, ed avremo il quoziente

$$\frac{2}{B} = 1,124682.$$

Questo quoziente sta tra D ed E; dividendolo per E, avremo il secondo quoziente

$$\frac{1,124682}{E} = 1,016598.$$

Similmente divideremo quest'ultimo numero pel prossimo minore F, ed avremo

$$\frac{1,046398}{F} = 1,009613;$$

e finalmente dividendo quest'ultimo quoziente pel prossimo minore H, otterremo

$$\frac{1,009613}{H} = 1,000572.$$

Or abbiamo evidentemente

$$2 = B \cdot E \cdot F \cdot H \cdot 1,000572;$$

quindi

$$\log. 2 = \log. B + \log. E + \log. F + \log. H + \log. 1,000572.$$

I logaritmi dei numeri indicati dalle lettere sono nella tavola. Rispetto all'ultimo quoziente se ne ottiene il logaritmo moltiplicando la sua frazione decimale pel modulo 0,434294..., donde risulta il prodotto 0,000248 ¹.

$$\begin{array}{l} b = 0,25 \\ e = 0,03125 \\ f = 0,015625 \\ h = 0,003906 \\ \log. 1,000572 = 0,000248 \\ \log. 2 = 0,301029 \end{array}$$

¹ Da quel che abbiamo detto nella nota a pag. 130 si rileva che chiamando β il logaritmo di un numero che eccede l'unità di una piccola frazione ω , si avrà il modulo $M = \frac{\beta}{\omega}$. Non essendo ω determinata da altra condizione che

Similmente volendo il logaritmo di 8009, si separeranno a destra tre cifre con una virgola; indi si determineranno colla regola precedente i quozienti

$$\begin{array}{rcl} \frac{8,009}{A} = 2,532667 & » & \frac{2,532667}{B} = 1,424223 \\ \frac{1,424223}{C} = 1,068017 & » & \frac{1,068017}{F} = 1,030274 \\ \frac{1,030274}{G} = 1,011903 & » & \frac{1,011903}{H} = 1,002844 \\ \frac{1,002844}{K} = 1,000391; \end{array}$$

avvertendo di spingere la serie di essi, finchè se ne ottenga uno che dopo la virgola abbia un numero di zeri eguale alla metà delle cifre decimali che si vogliono nel logaritmo. Completando quest'operazione come nell'esempio precedente, ed aumentando di 3 unità la somma $a + b + c + f + g + h + k + \log.1,000391$, poichè il numero dato è stato diviso per 1000, si avrà 3,90358 che sarà il logaritmo di 8009.

Vale a dire che colla tavola delle radici successive di 10, estese fino alla 12^a ed approssimate a 6 cifre decimali, si possono calcolare con 5 cifre decimali i logaritmi di tutti i numeri primi contenuti nelle tavole di Lalande. Estendendo le radici di 10

quella di esser piccolissima, ne segue che M non potrà esser costante per un dato sistema, se β non sia proporzionale ad ω . Or questa proporzionalità avrà luogo, quando ω sia una piccolissima frazione. Ed in effetto, se da M, 12^a delle radici quadrate di 10 segnate a pag. 134, vogliamo dedurre la 13^a N, sarà la frazione decimale di questa (per la regola esposta nel n° 110) metà della frazione decimale di M; dimodochè avremo $\frac{1}{2}(M - 1) = N - 1$; ma

si ha nel tempo stesso $\log.N = \frac{1}{2} \log.M$ (n° 137); dunque

$$\log.M : M - 1 = \log.N : N - 1.$$

Vale a dire che: *quando un numero eccede di una piccola frazione l'unità, il rapporto del logaritmo del numero alla frazione di eccesso rimane invariabile.*

Essendo così dimostrato che M risulta costante dalla relazione $M = \frac{\beta}{\omega}$, ne segue che per avere β , logaritmo di $1 + \omega$, basterà moltiplicare la frazione ω pel modulo M; quindi per avere il logaritmo di 1,000372 abbiamo moltiplicato 0,000372 pel modulo 0,434294.

fino a quella dell'ordine 35° , ed approssimando ciascuna alla 22^{a} decimale, si potranno ottenere i logaritmi con 20 cifre.

CAPO OTTAVO.

Uso delle tavole logaritmiche.

143. I logaritmi, sovente utili e talvolta indispensabili nella soluzione dei problemi numerici, sono stati calcolati per una certa estensione della serie naturale dei numeri, ed ordinati in tavole per averli pronti all'uopo. Servono esse alla soluzione dei due seguenti problemi, pei quali supponiamo che il lettore avesse le tavole di Lalande, che si estendono da 1 a 10000.

I. DATO UN NUMERO RITROVARE IL SUO LOGARITMO — Questo problema offre diversi casi che esamineremo successivamente.

— 1° *Sia dato un numero intero che non ecceda l'estensione delle tavole* — Cercando il numero dato nella colonna indicata da N, a destra sulla stessa orizzontale ne troveremo il logaritmo nella colonna che porta in cima l'indicazione log.

— 2. *Sia dato un intero che ecceda l'estensione delle tavole* — Sia dato, per esempio, il numero 72483. Pel 1° teorema dei logaritmi di Briggs abbiamo che la caratteristica del logaritmo richiesto sarà 5; e pel 2° teorema sappiamo che la frazione decimale del logaritmo resterà invariata, per qualunque potenza di 10 si divida il numero dato. Divideremo questo numero per 10, vale a dire che separeremo dalla sua destra una cifra decimale, ed avremo 7248,3. Ed in generale, quando il numero ecceda l'estensione delle tavole, bisognerà separarne tante cifre decimali, da lasciar quattro cifre nell'intero che ne risulta.

Essendo il numero 7248,3 compreso tra 7248 e 7249, la frazione decimale del suo logaritmo dovrà esser tra quelle dei logaritmi di 7248 e 7249. I logaritmi di questi due numeri differiscono (come si rileva dalla colonna D, nella quale sono indicate le differenze dei logaritmi successivi) di 0,00006; dunque il logaritmo di 7248,3 dovrà essere eguale a quello di 7248 più una

frazione x , minore di 0,00006. Assumendo il principio che le differenze dei numeri siano proporzionali alle differenze dei loro logaritmi, abbiamo $7249 - 7248 = 1$, $7248,3 - 7248 = 0,3$, $\log.7249 - \log.7248 = 0,00006$, $\log.7248,3 - \log.7248 = x$; quindi per determinare x avremo la proporzione

$$x : 0,00006 = 0,3 : 1,$$

dondo
$$x = \frac{0,00006 \times 0,3}{1} = 0,000018.$$

E poichè il logaritmo si vuole con 5 cifre decimali, bisognerà sopprimere la cifra 8, ed aumentare di un'unità la cifra precedente, per attenuare l'errore.

Faremo dunque $x = 0,00002$. Or la frazione decimale del logaritmo di 7248 è 0,86022: aggiungendovi x avremo 0,86024 che sarà la frazione decimale del logaritmo di 7248,3 ed in conseguenza di 72483, la cui caratteristica sappiamo esser 5. Quindi avremo

$$\log.72483 = 5,86024.$$

Osservando il modo di composizione del valore di x , vediamo che esso risulta dal prodotto di 0,3 (eccesso del numero dato sull'intero prossimo minore) per 0,00006 (differenza, che chiameremo *tavolare*, tra i logaritmi dei due numeri interi tra quali è compreso il numero dato. Dunque in generale: *per comporre la frazione decimale spettante al logaritmo di un numero che eccede l'estensione delle tavole, bisognerà aggiungere alla frazione del logaritmo del numero intero prossimo minore, il prodotto della differenza tavolare per la frazione decimale del numero dato.*

L'uso di questa regola ha purtuttavia un limite, al di là del quale essa diviene inutile. E per intenderne chiaramente la ragione, fa d'uopo premettere il seguente teorema, che ci sarà ancora utile per dichiarare il modo di soluzione del 2° problema generale che avremo ad esaminare.

Siano n ed $n + a$ i logaritmi di due numeri N ed $N + D$; di-

co che a andrà diminuendo a misura che aumenterà N — Essendo $a = \log.(N + D) - \log.N$, sarà (n° 137)

$$a = \log. \frac{N + D}{N} = \log. \left(1 + \frac{D}{N} \right).$$

Or come N aumenta, rimanendo costante D , la frazione $\frac{D}{N}$ andrà diminuendo, approssimandosi continuamente a zero; quindi $\log. \left(1 + \frac{D}{N} \right)$ si avvicinerà a $\log.1$, ossia zero, ed a tenderà eziandio verso lo stesso limite. Dunque per una differenza costante tra due numeri, la differenza dei loro logaritmi sarà più piccola in ragione che i numeri saranno più grandi. Così osserviamo che nelle tavole di Lalande a 5 cifre decimali la colonna D segna la differenza 44 tra i logaritmi di 1004 e 1005, e la differenza 4 tra quelli di 9997 e 9998; ed intanto i primi due numeri egualmente che i secondi differiscono di un'unità.

Quindi si manifesta la necessità di spingere sempre più innanzi l'approssimazione ¹ decimale dei logaritmi, a misura che maggior quantità di cifre avranno i numeri corrispondenti. Le tavole di Callet, che vanno certamente tra le migliori, ci presentano i logaritmi di taluni numeri coll'approssimazione a 20 ed anche a 61 cifre decimali. Ed in generale un logaritmo allora potrà ri-

¹ Eccetto quelli delle potenze di 10, tutti gli altri logaritmi sono irrazionali nel sistema di Briggs, e quindi calcolabili per approssimazione. Ed in vero, perchè il logaritmo di un numero N abbia la forma di commensurabile $\frac{m}{n}$, fa mestieri che sia soddisfatta la relazione

$$10^{\frac{m}{n}} = N.$$

Or elevando alla potenza n queste due quantità eguali, abbiamo

$$10^m = N^n.$$

Ma $10^m = 2^m \cdot 5^m$; sarà dunque ancora $N^n = 2^m \cdot 5^m$; ossia che N^n sarà composto di fattori 2 e 5 in numeri eguali. Ma l'elevazione alla potenza n non ha fatto che moltiplicare per n la quantità dei fattori primi della radice; dunque se N^n contiene in egual numero i fattori 2 e 5, N (radice di N^n) dovrà contenerli similmente, e perciò N sarà una potenza di 10.

guardarsi come sufficientemente approssimato rispetto al suo numero, quando sia diverso dai logaritmi di tutti gli altri numeri del medesimo ordine di cifre.

Premesso ciò sia 83 456 937 il numero di cui si cerca il logaritmo mediante le ordinarie tavole di Lalande, vale a dire quelle dell'edizione originale che porta 5 cifre decimali nei logaritmi. Separando dal numero dato le 4 cifre a sinistra perchè entrasse nell'estensione delle tavole, abbiamo 8345, 6937; e cercata nelle tavole la frazione decimale del logaritmo di 8345 si trova 0,92143. La differenza tavolare è 5; quindi rimarrebbe a moltiplicare 0,6937 per 5, ed addizionare l'intero di questo prodotto con 0,92143. Or se in vece di moltiplicare 0,6937 per 5, facciamo la somma dei prodotti

$$0,6 \times 5 \mid 0,09 \times 5 \mid 0,003 \times 5 \mid 0,0007 \times 5$$

noi osserviamo che eccetto il primo, nessuno degli altri tre prodotti dà cifre significative a sinistra della virgola; e perciò nessuno di essi farà parte di ciò che dovremo aggiungere a 0,92143 perchè divenga la frazione decimale del logaritmo di 83 456 937. La regola esposta sarà dunque insufficiente in questo caso perchè assegna uno stesso logaritmo ai quattro numeri differenti

$$83\ 456\ 937 \mid 83\ 456\ 930 \mid 83\ 456\ 900 \mid 83\ 456\ 000.$$

Laonde per trovare il logaritmo del numero proposto bisogneranno tavole approssimate ad un maggior numero di cifre decimali, non potendosi estendere quelle di Lalande a numeri che hanno più di 5 cifre.

— 3° *Sia dato un intero unito a frazione* — Se la frazione è ordinaria, comporremo l'intero ed il fratto in una sola espressione frazionaria, di cui otterremo il logaritmo, sottraendo dal logaritmo del numeratore quello del denominatore (n° 137). Sia, per esempio, $8 + \frac{5}{9}$ il numero di cui si cerca il logaritmo. Riducendolo in un'espressione frazionaria avremo

$$8 + \frac{5}{9} = \frac{77}{9};$$

quindi

$$\log.\left(8 + \frac{8}{9}\right) = \log.\frac{77}{9} = \log.77 - \log.9.$$

Se poi la frazione aggiunta all'intero fosse decimale, allora sapendo che i numeri che sono tra loro come 10^n ad 1, hanno la medesima frazione decimale nei loro logaritmi, cercheremo il logaritmo del numero dato, come se fosse intero, indi vi adatteremo la caratteristica che gli conviene secondo il suo valore primitivo. Supponiamo dato il numero 34,527: dopo aver trovato la frazione decimale 0,53816 spettante al logaritmo di 34527, vi aggiungeremo la caratteristica 1, poichè l'intero dato ha 2 cifre; ed avremo

$$\log.34,527 = 1,53816.$$

— 4° Sia data finalmente una frazione vera — Poniamo primieramente che fosse data una frazione ordinaria; $\frac{7}{19}$, per esempio. Equivalendo questa frazione al quoziente di 7 diviso per 19, dovremmo ottenerne il logaritmo sottraendo dal logaritmo di 7 quello di 19; e poichè questa sottrazione è impossibile, la eseguiremo in ordine inverso, facendo poi precedere il residuo dal segno —. Così avremo

$$\log.\frac{7}{19} = -(\log.19 - \log.7) = -0,43365.$$

In vece di un logaritmo negativo sovente è utile averne uno che avesse negativa la sola caratteristica: e ciò si ottiene aggiungendo al logaritmo del numeratore tante unità che bastino a poterne sottrarre il logaritmo del denominatore. Essendo nell'esempio precedente $\log.7 = 0,84510$ e $\log.19 = 1,27875$, è chiaro che basterà aggiungere 1 alla caratteristica del logaritmo di 7, perchè se ne possa sottrarre il logaritmo di 19; e queste unità aggiunte alla caratteristica del logaritmo del numeratore formeranno quella del residuo soprapponendovi il segno —. Così avremo

$$\begin{array}{r} 1 + \log.7 = 1,84510 \\ \log.19 = 1,27875 \\ \hline \log.\frac{7}{19} = \overline{1},56635 \end{array}$$

Collo stesso metodo si avrà il logaritmo di una frazione decimale. Sia data la frazione 0,7456. Essendo essa equivalente a $\frac{7456}{10000}$, ne avremo il logaritmo sottraendo il logaritmo di 10000 da quello di 7456; quindi si avrà negativo, come $-0,12749$, ovvero colla sola caratteristica negativa, $\bar{1},87251$. Ed in generale si avrà il logaritmo della frazione decimale, che ha n cifre, cercandolo come se il numero fosse intero, e poi sottraendo n unità dalla caratteristica del logaritmo ottenuto.

II. DATO UN LOGARITMO, TROVARE IL NUMERO CORRISPONDENTE — Questo problema offre due casi.

— **1° Un logaritmo positivo** — Si cercherà tra quelli che hanno la caratteristica 3, poichè avendo questi una piccola differenza tra essi, più piccola ancora sarà la differenza del logaritmo dato dal prossimo minore, quando la sua frazione decimale non si rinvenisse giusta nelle tavole. Sia 2,75645 il logaritmo dato: cercandolo nel modo indicato, troveremo che dovrebbe stare tra $3,75641 = \log.5707$ e $3,75648 = \log.5708$; dunque il numero corrispondente al logaritmo dato, nell'ipotesi della caratteristica 3, sarebbe 5707 più una frazione. Chiamando x questa frazione, ed osservando che la differenza tavolare è 7, e 4 quella tra il logaritmo dato ed il prossimo minore, avremo per determinare x la proporzione

$$x : 1 = 4 : 7,$$

donde

$$x = \frac{4}{7} = 0,57...$$

Quindi il numero corrispondente al logaritmo dato, fatta la correzione della caratteristica, sarà 570,757.

— **2° Un logaritmo negativo** — Sia interamente negativo il logaritmo dato, o abbia la sola caratteristica negativa, bisognerà sempre trasformarlo in un logaritmo positivo, aggiungendovi quel numero di unità che all'uopo sarà richiesto. Sia dato, per esempio, il logaritmo $-1,34827$: sottraendolo dall'intero prossimo maggiore 2, lo avremo trasformato nel logaritmo positivo 0,65173. A questo si trova, per mezzo delle tavole, corrispondente il nu-

mero 4,485, il quale sarà 100 volte maggiore del vero, poichè avendo aggiunto 2 (ch'è logaritmo di 100) al logaritmo dato, il numero che si cerca è venuto ad esser moltiplicato per 100; quindi il suo vero valore sarà 0,04485.

Similmente se fosse dato $\overline{2},36245$, logaritmo che ha negativa la caratteristica soltanto, aggiungendovi 2 avremmo il logaritmo positivo 0,36245 corrispondente ad un numero 100 volte più grande di quello che si cerca. E poichè per mezzo delle tavole si trova esser 2,304 il numero di cui è logaritmo 0,36245; così il valore richiesto sarà 0,02304.

144. Conosciuto l'uso delle tavole, facciamoci a risolvere taluni problemi, dai quali chiaramente apparirà quanta sia l'abbreviazione che i logaritmi apportano nel calcolo dei numeri. E cominciamo dalla determinazione delle radici.

Supponiamo che si voglia determinare il valore di $\sqrt[5]{97486}$. Essendo il logaritmo di un radicale eguale a quello del numero sottoposto al segno, diviso per l'indice della radice; cercheremo mediante le tavole il logaritmo di 97486, che risulterà 4,98894; lo divideremo per 5, e 0,99779 sarà il logaritmo di $\sqrt[5]{97486}$. A questo logaritmo corrisponde il numero 9,9493 che sarà il valore del radicale approssimato a 4 cifre decimali. Or se in vece dell'abbreviazione logaritmica, avessimo dovuto determinare le cinque cifre del numero 9,9493 operando in conseguenza della legge di composizione della 5^a potenza, avremmo dovuto aggiungere 20 zeri alla destra del numero 97476, e sperimentare l'esattezza di ciascuna cifra sottoponendola alle 5 condizioni date dalla legge della potenza.

145. Poniamo ancora che per mezzo di logaritmi si voglia determinare il valore di

$$x = \frac{32^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{8756}}{\sqrt[6]{63827} \cdot \sqrt[6]{5479}}.$$

Avremo

$$\log. x = \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \log. 32 + \frac{1}{4} \cdot \log. 8756 \\ \left(-\frac{1}{2} \cdot \log. 63827 + \frac{1}{6} \log. 5479 \right) \end{array} \right\}.$$

Or abbiamo

$$\begin{array}{r|l} 2. \log. 32 = 2.1,50515 = 3,01030 & \frac{1}{2} \log. 63827 = \frac{1}{2}.4,81840 = 2,40920 \\ \frac{1}{4} \log. 8756 = \frac{1}{4}.3,94231 = 0,98558 & \frac{1}{6} \log. 5479 = \frac{1}{6}.3,73870 = 0,62312 \\ & \hline & 3,99588 \qquad \qquad \qquad 3,03232 \end{array}$$

Quindi

$$\log. x = \left\{ \begin{array}{l} 3,99588 \\ - 3,03232 \\ \hline 0,96356 \end{array} \right.,$$

ed $x = 9,195$.

146. Sia ancora da determinarsi la somma dei primi 100 termini dalla progressione geometrica

$$\div \div 1 : \frac{6}{5} : \frac{36}{25} : \frac{216}{125} : \frac{1296}{625} : \text{ec.}$$

Dalla formola $s = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (n° 132) abbiamo la somma incognita

$$x = 1 \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{100} - 1}{\frac{6}{5} - 1} = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{100} - 1}{\frac{1}{5}} = 5 \left[\left(\frac{6}{5}\right)^{100} - 1 \right]$$

Se si dovesse comporre direttamente il valore di $\left(\frac{6}{5}\right)^{100}$, bisognerebbe eseguire 198 moltiplicazioni, 99 pel numeratore ed altrettante pel denominatore; e poi dividere un numero di 78 cifre, che deve rappresentare 6^{100} , per 5^{100} che ne avrà 70¹. Cercando in vece il valore di $\left(\frac{6}{5}\right)^{100}$ per mezzo di logaritmi, avremo

$$\begin{array}{r} \log. 6 = 0,77815125 \\ \log. 5 = 0,69897000 \\ \hline \log. \frac{6}{5} = \dots\dots\dots 0,07918125 \end{array}$$

1 Essendo $\log. 6 = 0,77815$,
e $\log. 5 = 0,69897$,
sarà $\log. 6^{100} = 77,81512$
e $\log. 5^{100} = 69,89700$
quindi 6^{100} avrà 78 cifre, e 5^{100} ne avrà 70.

Quindi

$$\log.\left(\frac{6}{5}\right)^{100} = 100 \cdot 0,07918125 = 7,918125,$$

a cui si trova corrispondente il numero 82 818 018 che sarà approssimativamente il valore di $\left(\frac{6}{5}\right)^{100}$.

147. Supponiamo in fine di voler calcolare il 30° termine della serie

$$2, 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16}, 2^{32}, 2^{64}, \text{ec.}$$

Essendo gli esponenti di questa serie ordinati in una progressione geometrica, di cui 1 è il primo termine, e 2 la ragione, sarà il 30° esponente rappresentato da

$$2^{30} = 536\,870\,912;$$

quindi il valore u del 30° termine della serie qui sopra indicata, sarà dato dalla relazione

$$u = 2^{536870912}.$$

Cercaudone il valore per mezzo di logaritmo, avremo

$$\log.u = 536870912 \cdot \log.2 = 161\,614\,248,17712\dots,$$

vale a dire che u sarà un numero di 161 614 249 cifre.

Per farsi un'idea della smisurata grandezza di questo numero, si osservi che in un volume di 500 pagine, ognuna di 60 versi ed ogni verso di 50 cifre, si contengono

$$500 \times 60 \times 50 = 1\,500\,000 \text{ cifre.}$$

Or dividendo 161 614 249 per 1500000 si ha per quoziente 107,7; dunque il numero richiesto sarebbe scritto in circa 108 volumi, ognuno di 500 pagine, ciascuna delle quali avrebbe 60 versi, ed ogni verso 50 cifre.

SEZIONE QUINTA.

Regole per calcolare su i numeri approssimati.

CAPO PRIMO.

Regola per sopprimere col minore errore possibile da un dato numero una certa quantità di cifre decimali.

148. Non di rado avviene che un'espressione decimale abbia più cifre di quelle che si richieggono per una sufficiente approssimazione del quesito proposto. In tal caso la facilità e speditezza del calcolo consigliano di sopprimere le cifre eccedenti, purchè ciò si faccia ingenerando il minimo errore possibile.

149. Poniamo in primo luogo che sia una la cifra da sopprimersi, e togliamo ad esempio il numero 7,538. Riducendo questo numero a 7,53 si produrrà un errore *per difetto* di 0,008: ma se in vece di 7,53 si ponesse 7,54 vale a dire che si aumentasse di 1 la cifra che precede 8, si avrebbe l'errore *per eccesso*

$$0,01 - 0,008 = 0,002$$

minore di quello che si aveva per difetto. Ed un simile risultato si sarebbe ottenuto per ogni altra cifra maggiore di 5.

Se poi la cifra da togliersi fosse 5, è chiaro che lasciando inalterata la cifra precedente ovvero aumentandola di un'unità del suo ordine, risulterebbe un errore costante, per difetto nel primo modo e per eccesso nel secondo. Così togliendo la cifra 5 al numero 4,75 avremo 4,7 coll'errore di 0,05 mancanti; e se in vece aumentiamo 7 di 1, avremo 4,8 con 0,05 di più.

Consideriamo in fine il caso di voler sopprimere una cifra minore di 5, e sia la cifra 4 dell'espressione 3,24. Quando la cifra 4 sia tolta senza far variare la cifra 2, si avrà l'errore per difet-

to di 0,04; ma se nel tempo stesso aumentiamo di 1 la cifra 2, l'errore diverrà

$$0,1 - 0,04 = 0,06,$$

più grande del primo.

Dunque in generale: *volendo sopprimere l'ultima cifra di un decimale, sarà utile aumentare di 1 la cifra precedente, se quella che si toglie sia maggiore di 5; lasciarla inalterata, se la cifra soppressa sia minore di 5; ed in fine se l'ultima cifra sia 5, sarà indifferente aumentare o pur no la cifra che precede.*

150. Passiamo ora al caso in cui si volessero sopprimere più cifre decimali, e sia 4,37511 l'espressione che supponiamo doverci limitare ai centesimi. Togliendo le tre ultime cifre, il numero 4,37 presenterà un errore per difetto di 0,00511. Ma se nel tempo stesso che si tolgono le ultime tre cifre, quella dei centesimi fosse aumentata di 1, si avrebbe l'errore per eccesso

$$0,01 - 0,00511 = 0,00489,$$

ed in conseguenza minore del primo. E se la prima a sinistra delle cifre sopprese sia maggiore di 5, tanto più l'errore per eccesso si troverà minore di quello per difetto.

Che se poi la prima delle cifre da togliersi fosse minore di 5, allora sarebbe utile lasciare inalterata la cifra precedente. Siano, per esempio, da sopprimersi le tre ultime cifre dell'espressione 0,67499, le quali pei loro valori propri rappresentano il limite del caso che consideriamo. Ne risulterà il numero 0,67 mancante dal valore primitivo di 0,00499; ma se si fosse aumentata di 1 la cifra 7, si sarebbe ottenuto l'errore per eccesso

$$0,01 - 0,00499 = 0,00501,$$

maggiore di quello per difetto.

Dunque in generale: *volendo sopprimere più cifre dalla destra di un decimale, sarà buono aumentare di 1 l'ultima delle cifre residue, se la prima delle cifre sopprese sia 5 o maggiore di 5; ed in vece lasciarla inalterata nel caso opposto.*

CAPO SECONDO.

Regola per ottenere il limite di esattezza del prodotto di più fattori approssimati.

151. Incominciamo dall'esaminare il caso più semplice, qual'è quello di supporre che uno soltanto de'due fattori sia approssimato, e l'altro esatto. Sia questo secondo fattore 3827, e 756 il fattore approssimato a meno di un'unità. Dal modo stesso con cui si ottiene l'approssimazione di un numero ad un dato limite di errore, risulta che questo limite sarà sempre minore di $\frac{1}{2}$ dell'unità di ordine minimo; dimodochè ponendolo $= \frac{1}{2}$, si stabilisce un'ipotesi limite alla quale il fatto numerico non potrà che più o meno avvicinarsi. E poichè l'errore potrà essere tanto per eccesso che per difetto, $756 \pm \frac{1}{2}$ sarà il valore limite del fattore che abbiamo supposto approssimato. Or eseguendo la moltiplicazione di 3827 per $756 \pm \frac{1}{2}$, è chiaro che bisognerà primieramente comporre il numero $2\ 893\ 212 = 3827 \times 756$, e poi aggiungervi o sottrarne (secondochè l'errore sarà stato per eccesso o per difetto, ciò che in realtà ignoriamo) $3827 \times \frac{1}{2}$. Il dubbio di dover addizionare o sottrarre questo prodotto dal precedente, renderà incerto il valore delle sue 4 ultime cifre; cosicchè il prodotto sarà 2890000, più una certa quantità di migliaia, centinaia, decine ed unità.

Dunque in generale: *il prodotto di due fattori, di cui un solo*

1 L'approssimazione ha luogo per un quoziente o per una radice; e se nell'uno che nell'altro caso volendola spingere ad n cifre decimali, converrà calcolarne $n+1$, affinchè se la $(n+1)^{esima}$ cifra risulti 5 o più grande, si aumenterà la n^{esima} di un'unità, e si lascerà inalterata nel caso contrario. L'errore sarà dunque sempre minore di $\frac{1}{2}$ dell'unità dell'ordine relativo alla cifra n^{esima} .

sia approssimato, avrà nella sua destra tante cifre dubbie, quante sono quelle del fattore esatto.

Da questa regola segue — 1° Che chiamando n la quantità di cifre del fattore esatto, che supponiamo un numero intero, bisognerà che l'altro fattore sia approssimato ad $m+n$ cifre decimali, perchè il prodotto lo sia ad m cifre di questa specie. Così volendo, nell'esempio recato, che il prodotto di 3827 per 765 risulti approssimato fino alle unità di 1° ordine, avremo $m = 0$, $n = 4$; quindi 765 dovrà essere approssimato fino alla 4ª cifra decimale. Ed in vero allora il prodotto avrebbe 4 cifre decimali, che dovendosi rigettare come dubbie lo lascerebbero approssimato alle unità di 1° ordine.

— 2° Che se il fattore esatto si componesse di m cifre intere ed n decimali, allora chiamando x il numero delle cifre decimali che dovrà avere l'altro fattore perchè il prodotto risulti esattamente approssimato fino alla decimale dell'ordine k , avremo per determinare x la relazione

$$n + x - (m + n) = k;$$

poichè il prodotto avrà in tutto $n + x$ cifre decimali, dalle quali toltene $m + n$ perchè dubbie, le rimanenti dovranno essere in numero k .

Eseguendo la sottrazione indicata nell'eguaglianza precedente, si avrà

$$x - m = k,$$

donde

$$x = k + m.$$

Così poniamo che 8,24 sia il fattore esatto; 3,9 l'approssimato; e che si voglia il prodotto esatto fino alla 3ª decimale. Avremo $k = 3$, $m = 1$, $n = 2$; quindi $x = 4$. Ed in effetto spingendo l'approssimazione di 3,9 fino alla 4ª decimale, il prodotto avrebbe 6 cifre di questa specie, dalle quali tolte le ultime $m + n = 3$ perchè dubbie, resterebbero certe le prime 3 dopo la virgola.

152. Che se i due fattori fossero entrambi approssimati, e quindi della forma $p \pm \frac{1}{2}$, e $q \pm \frac{1}{2}$, avremmo il loro prodotto

$$\left(p \pm \frac{1}{2}\right)\left(q \pm \frac{1}{2}\right) = p \cdot q \pm \frac{1}{2} p \pm \frac{1}{2} q \pm \frac{1}{4}.$$

Dal quale si rileva che se p e q hanno una stessa quantità di cifre, un egual numero di cifre dubbie vi sarà nella destra del prodotto $p \cdot q$; ma se uno dei fattori avesse più cifre dell'altro, la quantità delle cifre dubbie dovrebbe pareggiare quella del fattore che ne ha più, poichè in essa sarebbe contenuto il numero delle cifre dubbie prodotte dall'altro fattore. Così siano 734 e 5463 i due fattori approssimati a meno di $\frac{1}{2}$: se 734 fosse un numero esatto, il prodotto avrebbe nella sua destra 3 cifre di valore dubbio; e ne avrebbe 4, se in vece fosse 5463 un fattore esatto. Quindi essendo i due fattori approssimati, le 3 cifre dubbie prodotte da 734 saranno contenute nelle quattro cifre dubbie ingenerate da 5463.

Donde la regola generale: *quando i due fattori sono approssimati, il numero delle cifre di valor dubbio che il prodotto avrà nella sua destra, sarà eguale alla quantità di cifre del fattore che ne ha più.*

153. Per mezzo di questa regola possiamo risolvere il seguente problema: *dati due fattori, i cui valori si possono approssimare a volontà del calcolatore, determinare la quantità di cifre decimali che dovrà avere ciascuno di essi, perchè il prodotto abbia n cifre decimali esatte* — Chiamiamo m il numero delle cifre intere di uno dei fattori, x quello delle cifre decimali che dovrà avere; similmente diciamo m' ed y i numeri di cifre analoghe pel secondo fattore. Il prodotto avrà $x+y$ cifre decimali, da cui bisognerà poi sopprimere tutte quelle che saranno dubbie. Or perchè il prolungamento in decimali per ulteriore approssimazione di ciascuno dei fattori non riesca infruttuoso, come avverrebbe se il numero delle cifre dubbie si aumentasse dello stesso numero di cifre decimali aggiunte a ciascuno dei fattori, noi sottoporremo i numeri x ed y alla condizione che sia

$$m + x = m' + y. \quad (1)$$

Così i due fattori avranno una medesima quantità di cifre, ed $m+x$ ovvero $m'+y$ disegnerà il numero delle cifre dubbie da sopprimersi alla destra del prodotto che avrà $x+y$ cifre decima-

li. Resteranno dunque nel prodotto $x + y - (m + x)$ cifre decimali che per la condizione del problema dovranno essere in numero n ; avremo così

$$x + y - (m + x) = n,$$

ossia $y - m = n,$

donde $y = n + m.$

Sostituito questo valore di y nella relazione (1), avremo

$$x = m' + n.$$

Vale a dire che: *ciascuno dei fattori dovrà avere un numero di cifre decimali, eguale a quello che si vuole nel prodotto, più il numero di cifre intere dell'altro fattore.*

Siano, per esempio, 834,2 e 76,28 i due fattori approssimati, il cui prodotto si vuole esatto fino alla 4^a cifra decimale. Avremo così $m = 3$, $m' = 2$; quindi

$$x = 4 + 2 = 6$$

$$y = 4 + 3 = 7.$$

Ciascuno dei due fattori avrà in tutto 9 cifre; e poichè la somma delle loro cifre decimali è 13, altrettante ne avrà il prodotto; dalle quali poi toltene 9 come dubbie, ne resteranno 4 esatte.

154. Poichè dalla destra di un prodotto di fattori approssimati bisogna sopprimere un certo numero di cifre perchè dubbie, sarebbe utile un metodo col quale potessimo ottenere il prodotto approssimato al limite di esattezza delle sue cifre, senza fare la moltiplicazione di quelle cifre dei fattori, i prodotti delle quali dovrebbero poi cancellarsi.

Siano 8,3279 e 6,4536 due fattori approssimati: il prodotto avrà 8 cifre decimali, da cui dovendone sopprimere 5 come dubbie, l'approssimazione del prodotto resterà limitata alla 3^a cifra decimale. Noi lo calcoleremo con una cifra di più, onde non perdere la ritenuta proveniente dalla somma della 4^a colonna.

Moltiplicheremo primieramente 8,3279 per le 6 unità del moltiplicatore, ed avremo il prodotto con 4 cifre decimali 49,9674.

$$\begin{array}{r} \dots \\ 8,3279 \\ 6,4536 \\ \hline 49,9674 \\ 3,3311 \\ 4163 \\ 249 \\ 49 \\ \hline 53,744 \end{array}$$

Indi passeremo alla moltiplicazione dello stesso moltiplicando per 0,4. Questo prodotto avrebbe 5 cifre decimali; ma poichè ne vogliamo 4 soltanto, così non faremo il prodotto di 9 per 4. Passeremo in vece a quello di 7 per 4, dopo aver segnato un punto sulla cifra 9, onde rammentarci di averla già trascurata. Or il prodotto di 7 per 4 ci dà 28, ed avremmo avuto in vece 31, se a 7×4 avessimo aggiunta la ritenuta di 9 per 4; quindi trascurando questo prodotto, bisognerà serbare la sua ritenuta — Ed in questo modo si è ottenuto anche con 4 cifre decimali il 2° prodotto parziale 3,3311.

Segnata similmente di un punto la cifra 7, passeremo a moltiplicare per la cifra 5 del moltiplicatore, cominciando dalla cifra 2 del moltiplicando, ed aggiungendo a questo primo prodotto la ritenuta di 5 per 7 — E nello stesso modo continuando rispetto alla composizione degli altri prodotti parziali, avremo con 3 cifre decimali il prodotto 53,744.

155. Supponiamo ancora che si cerchi il prodotto dei due fattori approssimati 0,27856 e 0,08439. Questo prodotto, dovendo avere 10 cifre decimali, di cui le ultime 5 sono da cancellarsi come dubbie, sarà esatto fino alla 5ª decimale. Or per valutare a primo sguardo il valore di sito di ciascuna cifra dei prodotti parziali, sarebbe necessario che il moltiplicatore avesse la stessa forma che nel caso precedente, vale a dire che la prima a sinistra delle sue cifre rappresentasse unità del 1° ordine. Questa condizione sarà soddisfatta, movendo la virgola di due passi a destra nel moltiplicatore e di altrettanti passi a sinistra nel moltiplicando: in tal modo essendo uno dei fattori moltiplicato per la stessa potenza di 10, per la quale l'altro è diviso, il prodotto rimarrà necessariamente invariato. Eseguendo allora l'operazione, come nell'esempio precedente, vale a dire calcolando una cifra di più di quelle che si debbono conservare nell'ultimo risultamento, avremo il prodotto 0,02350 esatto fino alla 5ª decimale.

Ciò che abbiamo fatto in quest'ultimo esempio ci dimostra quel

$$\begin{array}{r}
 \dots \\
 0,0027856 \\
 8,439 \\
 \hline
 0,022284 \\
 1114 \\
 83 \\
 24 \\
 \hline
 0,02350
 \end{array}$$

che dovremo fare in altri casi consimili per ottenere che la 1^a cifra a sinistra del moltiplicatore rappresentasse unità del 1° ordine.

156. Per calcolare agevolmente i valori di sito dei diversi prodotti elementari, si usa ancora di scrivere le cifre del moltiplicatore in ordine inverso sotto quelle del moltiplicando, dimodochè si avrà un costante valore di sito nei prodotti di ciascuna cifra del moltiplicando per la sottoposta cifra del moltiplicatore. Prendendo ad esempio gli stessi

0,27856
9348
0,022284
1114
83
24
0,02350

fattori precedenti, osserviamo che dovendosi calcolare il prodotto fino alla 6^a cifra decimale, vale a dire fino a quella dei milionesimi, avremo un prodotto di quest'ordine moltiplicando i 9 centomillesimi del moltiplicatore per 2 decimi del moltiplicando: scriveremo dunque la prima cifra sotto la seconda. Prodotti in milionesimi avremo ancora scrivendo le rimanenti cifre 3, 4 ed 8 del moltiplicatore sotto le cifre 7, 8 e 5 del moltiplicando. E cominciando dal moltiplicare 0,27856 per la cifra 8 del moltiplicatore, trascureremo il prodotto di 8 per 6 perchè darebbe diecimilionesimi, ma aggiungeremo la ritenuta 4 di questo prodotto a quello di 8 per 5. Avremo così il prodotto 22284, il quale rappresentando milionesimi, lo faremo precedere da un zero, e poi scriveremo la virgola. Definito così il primo prodotto parziale, sarà facile ordinarvi al disotto i prodotti seguenti; poichè avremo che il 2° dovrà cominciare dalla moltiplicazione di 4 per 8, aggiungendovi la ritenuta di 4 per 5; il 3° comincerà dal prodotto di 3 per 7, aggiungendovi la ritenuta di quello di 3 per 8, ec.

Questo secondo metodo richiede dunque due particolari avvertenze — 1^a Quella di definire il posto che bisognerà dare ad una qualunque delle cifre del moltiplicatore, perchè il prodotto risulti di quell'ordine che si vuole — 2^a Quella di determinare il posto della virgola nel primo prodotto parziale — In conseguenza questo secondo metodo alla possibilità di un errore nei prodotti elementari ne aggiunge due altre, l'una nascente dall'ordinare le

cifre del moltiplicatore sotto quelle del moltiplicando, e l'altra dal sito che conviene dare alla virgola. Non pare dunque che questo metodo debba preferirsi al primo.

CAPO TERZO.

Regola per calcolare il limite di esattezza del quoziente di due numeri approssimati.

157. Per poter calcolare il limite di esattezza di un quoziente, è d'uopo premettere il seguente teorema.

Chiamando m ed n le quantità di cifre di due fattori A e B , il prodotto AB ne avrà $m+n$ ovvero $m+n-1$.

Ed in vero un numero di m cifre dovrà esser compreso tra 10^m e 10^{m-1} : così 4859, che ha 4 cifre sta tra $10000 = 10^4$ e $1000 = 10^3$. Similmente un numero di n cifre starà tra 10^n e 10^{n-1} . Quindi il prodotto di un numero di m cifre per un altro di n cifre dovrà stare tra $10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$ e $10^{m-1} \cdot 10^{n-1} = 10^{m+n-2}$. Ma 10^{m+n} è formato da 1 seguito da $m+n$ zeri, vale a dire ch'è il numero più piccolo di $m+n+1$ cifre; in conseguenza il prodotto dei due fattori, l'uno avente m cifre e l'altro n , dovendo esser minore di 10^{m+n} , dovrà avere necessariamente una cifra di meno, e perciò potrà al più contenere $m+n$ cifre. Daltronde 10^{m+n-2} , ch'è il limite inferiore del sopradde-
tto prodotto, è formato da 1 seguito da $m+n-2$ zeri, vale a dire che ha $m+n-1$ cifre; ed il prodotto in quistione potrà esserne maggiore, senza che abbia più grande quantità di cifre. Dunque necessariamente il prodotto dovrà avere $m+n$ cifre, ovvero $m+n-1$. Così troviamo che 3827×576 ha 7 cifre, ossia ne ha $4+3$ somma dei numeri di cifre dei fattori, o 27739×3263 ne ha 8, vale a dire $5+4-1$.

Reciprocamente: il quoziente di due numeri, di cui il dividendo abbia m cifre ed il divisore, avrà $m-n+1$ cifre, ovvero $m-n$, secondochè il 1° dividendo parziale avrà n cifre o $n+1$.

Ed in vero se il divisore entra nelle prime n cifre del dividen-

do, di questo resteranno $m - n$ cifre che ne daranno altrettante al quoziente, il quale in conseguenza aggiungendo $m - n$ cifre a quella ottenuta dalla 1ª divisione parziale, ne dovrà avere $m - n + 1$. Ma se la 1ª divisione parziale avrà richiesto le prime $n + 1$ cifre del dividendo, il quoziente dovrà avere necessariamente una cifra di meno, e ne avrà $m - n$. Così 4796543:2537 dà un quoziente di 4 cifre, ossia di $7 - 4 + 1$, poichè il divisore può contenersi nelle prime 4 cifre del dividendo; ma 257896:4238 ne darà uno di 2 cifre, ossia di $6 - 4$, poichè la 1ª divisione richiede le prime $4 + 1$ cifre del dividendo.

Ciò posto, facciamoci a considerare i tre casi che può presentare la divisione dei numeri approssimati.

158. PRIMO CASO — Dividendo approssimato e divisore esatto — Supponiamo fatta la divisione, ed approssimato il quoziente fino ad un numero p di cifre; e chiamiamo m il numero di cifre del dividendo ed n quello del divisore. Moltiplicando il divisore pel quoziente, il prodotto avrà $n + p$ cifre, o ne avrà almeno $n + p - 1$. Or se il quoziente è approssimato fino a meno un unità dell'ultima sua cifra, il suo prodotto pel divisore avrà n cifre dubbie, quindi resteranno p o $p - 1$ cifre esatte. Ma il numero di queste cifre nel dividendo è $m - 1$; quindi per avere il numero p di cifre del quoziente approssimato a meno un'unità dell'ultima sua cifra, si avranno le due relazioni

$$p = m - 1, \quad p - 1 = m - 1.$$

Dalla prima di queste due eguaglianze abbiamo il numero delle cifre del quoziente, eguale al numero delle cifre del dividendo meno una, e dalla seconda lo abbiamo eguale allo stesso numero senza sottrazione veruna. Or il caso di $p = m - 1$ suppone che la 1ª divisione avesse richiesto $n + 1$ cifre del dividendo, e l'altro di $p = m$ suppone in vece che siano state sufficienti le prime n cifre. Dunque in generale:

Perchè il quoziente di un dividendo approssimato per un divisore esatto riesca approssimato a meno un'unità dell'ultima sua cifra, dovrà avere tante cifre quante ne ha il dividendo ovvero lo

stesso numero meno 1, secondochè il primo dividendo parziale avrà richiesto un numero di cifre eguale a quello del divisore od una di più.

Così nel quoziente di 3487 diviso per 2635 l'approssimazione sarà a meno un'unità della sua 5^a cifra, poichè il primo dividendo parziale avrà un numero di cifre eguale a quello del divisore; e viceversa nel quoziente di 176458 diviso per 963 l'approssimazione sarà a meno un'unità della sua 5^a cifra, poichè il primo dividendo parziale dovrà avere una cifra di più di quelle del divisore.

159. Dietro questa regola è facile risolvere il seguente problema: *determinare il grado di approssimazione che dovrà avere il dividendo nel caso del divisore esatto, perchè il quoziente riesca approssimato a meno un'unità di dato ordine* — Chiamiamo p il numero di cifre che dovrà avere il quoziente, perchè l'ultima risulti approssimata a meno un'unità dell'ordine dato: è chiaro che il dividendo dovrà comporsi di $p \text{ o } p+1$ cifre, secondochè nella 1^a divisione dovrà presentare lo stesso numero di cifre del divisore o una di più. Poniamo per esempio che si voglia il quoziente di $4826 : 243$ approssimato fino ai centomillesimi. Poichè un numero intero di 2 cifre farà parte del quoziente, questo dovrà avere in tutto 7 cifre perchè risulti approssimato a meno di un centomillesimo. E daltronde essendo il numero di cifre del 1^o dividendo parziale eguale a quello del divisore, è chiaro che tutto il dividendo dovrà avere 7 cifre, delle quali quattro essendo già date come espressione di un numero intero, le altre tre saranno decimali, vale a dire che il dividendo dovrà essere approssimato fino ai millesimi.

160. SECONDO CASO — *Dividendo esatto e divisore approssimato* — Chiamiamo D il dividendo, d il divisore e q il quoziente. Essendo d approssimato, il suo vero valore sarà $d \pm \frac{1}{2}$; e poichè $q = \frac{D}{d}$, sarà

$$q > \frac{D}{d - \frac{1}{2}}, \text{ e } q < \frac{D}{d + \frac{1}{2}}.$$

Chiamando δ la differenza dei due valori di q , avremo

$$\delta = \frac{D}{d - \frac{1}{2}} - \frac{D}{d + \frac{1}{2}},$$

delle quali due espressioni frazionarie fatta la sottrazione, dopo averle ridotte ad uno stesso denominatore, si ottiene

$$\delta = \frac{D}{d^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{D}{d}}{d - \frac{1}{4d}} = \frac{q}{d - \frac{1}{4d}}.$$

Quindi se q sarà minore di d per una differenza maggiore di $\frac{1}{4d}$, sarà $\delta < 1$, ed il valore di q sarà esatto a meno un'unità dell'ultima sua cifra. Dunque in generale (trascurando $\frac{1}{4d}$ come quantità piccolissima)

Sarà in questo caso esatto il quoziente a meno di un'unità dell'ultima sua cifra, se abbia tante cifre, che una di più lo renderebbe maggiore del divisore.

Sia per esempio 3827 il dividendo, e 2684 il divisore approssimato a meno di un'unità. Poichè 1 è la prima cifra del quoziente, questo potrà estendersi a 4 cifre senza superare il divisore, e quindi a meno di un millesimo avremo

$$\frac{3827}{2684} = 1,426.$$

Ed in vero dividendo 3827 per $2684 \pm \frac{1}{2}$ che rappresenta il vero valore del divisore, avremo

$$\frac{3827}{2684,5} = 1,42559 \text{ e } \frac{3827}{2683,5} = 1,42612.$$

Essendo 0,00053 la differenza di questi due quozienti, quella di 1,426 dal vero quoziente dovrà essere minore di 0,001.

Supponiamo ancora 13 da dividersi pel numero approssimato 83475. Essendo 1 la 1ª cifra significativa del quoziente, potremo estenderne l'espressione fino alla 5ª cifra; e poichè sarà stato necessario aggiungere 4 zeri alla destra del dividendo per otte-

nere questa prima cifra, così la virgola dovrà retrocedere di quattro posti nel quoziente, ed avremo

$$\frac{13}{83475} = 0,000015573$$

a meno di 0,000000001.

161. Or proponiamoci di determinare il grado di approssimazione che dovrà avere il divisore, perchè il quoziente sia esatto a meno di un'unità di ordine dato. Sia, per esempio, da determinarsi il quoziente esatto a meno di un millesimo di 576 diviso per 123, divisore approssimato a meno di 1.

Essendo 4 la 1^a cifra del quoziente, questo non potrà averne più di due senza divenire più grande del divisore; e sarà perciò approssimato a meno di 0,1. Per esserlo a meno di 0,001 dovrebbe comporsi di 4 cifre, ed in conseguenza il divisore dovendone avere 5, dovrebbe essere approssimato a meno di 0,01.

162. TERZO CASO — *Dividendo e divisore approssimati* — Chiamando ancora D il dividendo, d il divisore e q il quoziente, saranno i veri valori del dividendo e divisore $D \pm \frac{1}{2}$, $d \pm \frac{1}{2}$. E combinando questi quattro valori in tutti i modi possibili, si avranno quattro quozienti diversi, di cui il massimo sarà $\frac{D + \frac{1}{2}}{d - \frac{1}{2}}$ ed il minimo $\frac{D - \frac{1}{2}}{d + \frac{1}{2}}$. Quindi la massima differenza dei quozienti sarà

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{D + \frac{1}{2}}{d - \frac{1}{2}} - \frac{D - \frac{1}{2}}{d + \frac{1}{2}} = \frac{D + d}{d^2 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{D}{d} + 1}{d - \frac{1}{4d}} \\ &= \frac{q + 1}{d - \frac{1}{4d}}. \end{aligned}$$

Dunque sarà $\delta < 1$, finchè si avrà $q + 1 < d$. Quindi

Il quoziente di due numeri approssimati potrà riguardarsi esatto a meno di un'unità dell'ultima sua cifra, finchè il suo valore aumentato di 1 sia minore di quello del divisore.

Così supponendo approssimati i due numeri 375 e 261, il quoziente del 1° pel 2° potrà approssimarsi a 3 cifre, poichè 1 è la 1ª cifra del quoziente.

CAPO QUARTO.

Regola per calcolare il limite di esattezza della radice 2ª di un numero approssimato.

163. Perchè la radice approssimata ad n cifre sia esatta a meno di un'unità dell'ultima sua cifra, n dovrà esser tale che moltiplicando la radice per se stessa, e cancellando dalla destra del prodotto le n cifre dubbie, le rimanenti a meno di un'unità dell'ultima cifra dovranno rappresentare il numero dato. Or la radice moltiplicata per se stessa dovrà dare un prodotto di $2n$ cifre se quelle del numero dato sono in quantità pari, e se queste fossero in numero dispari il prodotto della radice per se stessa darebbe un numero di $2n-1$ cifre. Le cifre dunque che resteranno nel prodotto, dopo averne tolte le n inesatte, saranno n nel primo caso ed $n-1$ nel secondo. Dunque: *se il numero dato ha una quantità pari di cifre, la radice avendone egual numero, riuscirà esatta a meno un'unità dell'ultima sua cifra: e sarà egualmente esatta nel caso di una quantità dispari di cifre nel numero dato, se ne avrà una di più.*

Sia, per esempio, 567894 il numero dato. Approssimando la sua radice fino alla 6ª cifra, abbiamo 753,587. Moltiplicando questo numero per se stesso, ed approssimandone il prodotto alle unità colla regola del n° 156, poichè le 6 cifre decimali che avrebbe, sarebbero da cancellarsi come inesatte; troviamo 567893 che a meno di un'unità riproduce il numero dato.

$$\begin{array}{r}
 753,587 \\
 \times 753,587 \\
 \hline
 5275\ 10,9 \\
 376\ 79,3 \\
 22\ 60,7 \\
 3\ 76,7 \\
 60,2 \\
 5,2 \\
 \hline
 5678\ 93,9
 \end{array}$$

Sia dato ancora il numero 76584. il quale avendo 5 cifre, potremo per la regola trovata estendere la sua radice a 6 cifre, ed avremo 276,738. Moltiplicando questo numero per se stesso, e trascurando le 6 cifre decimali del prodotto perchè inesatte, troviamo nel risultamento 76583,4 riprodotto il numero dato a meno di un'unità.

$$\begin{array}{r}
 276,738 \\
 837\ 67\ 2 \\
 \hline
 553\ 47,6 \\
 193\ 71,6 \\
 16\ 60,3 \\
 1\ 93,6 \\
 8,2 \\
 2,1 \\
 \hline
 765\ 83,4
 \end{array}$$

LIBRO SECONDO.

APPLICAZIONI DELLE TEORICHE PRECEDENTI.

INTRODUZIONE.

164. Che le contrattazioni, in cui si compendia la vita commerciale di un popolo, siano state le occasioni del primo svolgimento della scienza del calcolo, è un concetto di tanta evidenza, che può far a meno di documenti storici che venissero a rifermarlo. E quando si volesse purtuttavia sorreggerlo di un fatto luminoso, ce l'offrirebbe la storia del Medio Evo, presentandoci in un banchiere toscano, Leonardo da Pisa, l'introduttore dell'algebra in Italia, che poi ne fu maestra alle altre nazioni.

165. Questa relazione di mezzo a fine che la scienza del calcolo ha colla vita commerciale, si è voluta confondere con quella di principio ad illazione, e da questo primo errore logico è derivata la falsa idea di riguardare l'aritmetica come la scienza dei problemi di commercio, prendendo questa voce nel senso più ampio. L'erroneità di questo concetto sarà evidente, quando si consideri che in un problema aritmetico, come in ogni problema matematico in generale, si presentano due difficoltà alla sua risoluzione. L'una è quella di determinare quali operazioni di calcolo si dovranno fare per ottenere il valore del numero incognito, l'altra è quella di attuarle. Si vince la seconda, apparando le regole del calcolo; ma la prima non può superarsi, se non si scuovre la dipendenza del numero incognito dalle quantità date nel problema. Or la forma speciale, sotto cui lo spirito concepisce questa dipendenza, è determinata dalle relazioni ch'egli intuisce tra le quantità date e l'incognita; e pretendere che la scienza del calco-

lo venisse a spianarci questa difficoltà, sarebbe lo stesso che voler da essa l'*arte d'intendere*. Poniamo per esempio che un negoziante, avendo lucrato 370 ducati sulla vendita di una merce che aveva comperato per 2500 ducati, voglia sapere a quanto per 100 corrisponda il suo guadagno. Egli non risolverà bene il suo problema, se prima non vegga in qual modo la ragione richiesta dipende dai numeri 370, 2500 e 100; e quando avrà trovato che per determinare il numero incognito gli è necessario moltiplicare 370 per 100 e poi dividerne il prodotto per 2500; allora la scienza del calcolo gli somministrerà le norme per menare ad effetto queste due operazioni.

166. Se la scienza aritmetica non è che un istrumento di operazione nella soluzione dei problemi numerici, l'esercizio di risolverne molti potrà in gran parte spianarne la via, rendendo lo spirito più destro in percepire le relazioni di dipendenza del numero incognito dai dati del quesito. È questo l'unico vantaggio che si trae dallo studio dei molti problemi, che si trovano risolti nei trattati di aritmetica, e che l'istitutore farà bene di presentare sotto svariate forme, perchè gli allievi aguzzassero l'ingegno in cercarne i modi di soluzione.

Egli è vero che quelle condizioni, da cui il problema toglie la sua forma concreta, per nulla influiscono sulla determinazione del valore incognito; e che in conseguenza la quistione potrebbe svestirsi, senza patire alterazione veruna. Ma se così facendo si agevola la soluzione, rendendo più facile la veduta dell'analogia che il quesito proposto potrà avere con uno di quei problemi astratti che sorgono spontanei dalle stesse teoriche del calcolo; si perde d'altronde tutta l'utilità che se ne poteva trarre, riguardandola come mezzo di esercitazione. Se ad un allievo, che abbia ben capito la teorica delle progressioni geometriche, si presenti un problema d'interesse composto, si può esser quasi certo che dopo averlo alquanto considerato, dirà di non trovar mezzo come venirne a capo. Glisi detti in vece una progressione geometrica, dimandandone la somma di un certo numeri di termini; e lo si vedrà allora piantare la formola generale per farne l'applicazione al

quesito proposto. Intanto le due quistioni non ne facevano che una sola, e se la loro identità è restata nascosta alla mente dell'allievo, ciò è dipeso dal perchè egli non ha saputo sceverare la quistione puramente numerica dalle idee di capitale, interesse e tempo. Questa prontezza di astrazione, senza la quale è difficile che lo spirito colga i rapporti di quantità tra i dati e l'incognita di un problema, è forse la principale utilità che l'allievo possa trarre dalla pratica delle quistioni di aritmetica commerciale.

167. In ogni problema fa d'uopo distinguere i valori dei dati dalla loro relazione al numero incognito, già implicitamente dichiarata dal suo stesso enunciato. Or se consideriamo il quesito nella sola relazione dei dati all'incognita, senza verun riguardo al loro speciale valore, otterremo dalla sua soluzione la *formola generale* del problema, la quale tradotta in linguaggio ordinario ne costituirà la *regola*, secondo l'espressione usata dagli aritmetici. Quindi la *regola del tre semplice*, e *del tre composta*, la *regola di allegazione*, ec. non sono che traduzioni in linguaggio ordinario delle formole generali risguardanti taluni problemi che si possono facilmente risolvere per mezzo di proporzioni.

168. Poichè, indipendentemente dalla loro utilità tecnica, conviene lasciare i problemi sotto la loro forma concreta, sarà necessario premettere una esposizione del sistema metrico del proprio paese, poichè il valore assoluto e la speciale suddivisione delle unità di misura adoperate nelle contrattazioni, determinano la forma concreta dei problemi di aritmetica commerciale. Daremo perciò cominciamento a queste applicazioni del calcolo numerico con una breve esposizione del nostro sistema metrico; aggiungendovi ancora quella del sistema francese, sì per bene intendere le molte opere scientifiche che ci vengono da quella nazione, come ancora per l'uso che ne fanno diversi autori nel dare l'equivalente delle misure stabilite presso gli altri popoli.

SEZIONE PRIMA.

Sistema metrico.

CAPO PRIMO.

Caratteri che deve avere un sistema metrico perfetto.

169. Le condizioni, cui deve soddisfare un sistema metrico perfetto, sono le seguenti.

1^a — *Rispetto ad una medesima specie di grandezza deve presentare varie unità di diverso valore assoluto, e l'una dipendente dall'altra* — La brevità del calcolo richiede che l'espressione concreta delle grandezze sia fatta coi numeri interi più piccoli possibili. Or se colla canna dovessimo misurare sì la doppiezza di un foglio di carta che il diametro dell'orbita terrestre, avremmo la prima linea espressa da una frazione incomoda per la grandezza del suo denominatore, e l'altra lo sarebbe da un numero intero esteso alle centinaia di bilioni. Fuggiamo ancora non esservi altra unità di tempo che il giorno: i 18 secoli e mezzo finora decorsi dell'era volgare sarebbero rappresentati dal numero 675700, e la durata di 1'' lo sarebbe dalla frazione $\frac{1}{86400}$. Dicasi altrettanto delle altre unità metriche, e si comprenderà di leggieri la necessità di averne talune assai grandi ed altre assai piccole.

: Queste unità, differenti pel solo valore assoluto, debbono purtuttavia avere tra esse una definita relazione, per mezzo della quale si possa dal valore numerico di una grandezza, dato da una di queste unità, dedurre quello che si sarebbe da un'altra ottenuto, senza ripetere l'esperimento di una misura diretta. Poniamo che il peso di un corpo, riferito al rotolo, fosse rappresentato dal numero 43, e che si volesse l'espressione dello stesso peso in libbre. Essendo la libbra 0,36 di rotolo, basterà moltiplicare 43

per $\frac{100}{36}$ ¹ per avere il numero richiesto. Ma se la relazione della libbra al rotolo non fosse definita, la traduzione dei rotoli in libbre non si potrebbe in altro modo attuare che rifacendo la pesata.

2^a — *La dipendenza delle unità omogenee deve consistere in una relazione decimale* — Basta comparare il calcolo delle frazioni decimali a quello delle frazioni ordinarie per vedere tutta l'utilità di un sistema metrico ordinato sulla base 10. Purtuttavia è da osservarsi che se questa condizione non è stata adempiuta, quando nell'incipiente civiltà di un popolo si dava un primo ordinamento ad un sistema di pesi e misure, sarà poi impossibile l'introdurla, dopo che una lunga consuetudine avrà immediato il sistema coi bisogni del popolo. Allora il volgo, che ne costituisce la parte maggiore, resisterebbe a tale innovazione, poichè nell'industria, di cui vive, la celerità delle operazioni, e quindi la somma del lucro, dipendono dalla facilità che l'abitudine apporta nei calcoli eseguiti colla mente. S'introduca allora una nuova numerazione nel sistema metrico; l'aritmetica del volgo ne resterà distrutta, ed il piccolo commercio ne verrà inceppato. ²

1 Siano u ed u' due unità omogenee aventi tra esse il rapporto k , dimodochè esista la relazione $u = ku'$; siano inoltre n ed n' l'espressioni numeriche di una stessa grandezza riferita alle unità u ed u' ; si avrà

$$nu = n'u'.$$

E sostituendo ad u il suo valore ku' , sarà

$$nku' = n'u',$$

ossia

$$nk = n'.$$

Vale a dire che il numero ottenuto dall'unità k volte minore, sarà viceversa k volte più grande.

Or essendo la libbra minore del rotolo nel rapporto di 36 a 100, il numero delle libbre, equivalenti ai rotoli dati, dovrà aumentare nel rapporto di 100 a 36.

2 Pare che i dotti autori del sistema metrico francese non avessero ponderato abbastanza queste osservazioni, la cui giustezza vediamo confermata dal fatto di non essere il nuovo sistema tuttavia popolare presso quella nazione, quantunque fin dal 1799 fosse stato dichiarato legale ed esclusivo.

Al contrario la riforma recata nel nostro sistema metrico dalla legge del 6

3^a — *Tutti gli elementi del sistema debbono essere dedotti dall'unità lineare* — La necessità di questa dipendenza è evidente quanto alle unità di superficie e di volume, poichè la misura di queste grandezze dipende dalle loro dimensioni, che sono quantità lineari. Rispetto poi agli altri elementi di un sistema metrico, incominciamo dal supporre che veruna relazione esistesse tra l'unità di lunghezza e quella di capacità: non si potrebbe allora determinare la quantità del vino contenuto in una botte, senza cacciarlo fuori; la costruzione di una vasca, capace di data quantità di acqua, potrebbe riuscir soddisfacente per puro azzardo. Poniamo

aprile 1840, dimostra la profonda saggezza del vostro Governo che ha saputo conciliare due condizioni di difficile coordinamento, quali erano quelle di agevolare i calcoli commerciali ed amministrativi con un sistema decimale senza sconvolgere le consuetudini dell'aritmetica volgare. Quelle misure, che come il tomolo, il barile, ec. non possono uscire dai limiti del piccolo commercio, e quindi dar materia a lunghi calcoli, non hanno ricevuto altra modificazione che quella di una regolare uniformità, tanto necessaria alla facilità delle contrattazioni ed a prevenire i litigi: al contrario le unità di peso, lunghezza, ec. conservate nei loro valori assoluti, non hanno colla loro novella suddivisione decimale recato alcuna perturbazione nel computo volgare, che ha potuto continuare nel suo abituale sistema di parti metà, terze, quarte, ec. poichè ne ha trovato costrutti gli equivalenti nel nuovo sistema.

Ne'soli motivi economici, ma delle ragioni scientifiche possono imporre di conservare per taluni elementi del sistema un ordinamento di multipli e sottomultipli diverso dal decimale. Serva d'esempio la divisione centesimale del cerchio, già proposta da Briggs e da altri geometri, prima che la Commissione incaricata dei nuovi pesi e misure della Francia, l'avesse menata ad effetto col nuovo sistema metrico. Intanto il grado centesimale non ebbe fortuna; e se sul principio parve una ragione soddisfacente quella di non esservi le corrispondenti tavole trigonometriche, se ne vide poi tutta la insufficienza quando costrutte le nuove tavole, gli astronomi ed i marinai non si mostrarono meglio disposti a volerne far uso. La vera ragione di questa ripugnanza, non preveduta dai dotti componenti di quella Commissione, stava (come fece rilevare per la prima volta un nostro distinto matematico, F. Amante) nella divisione sessagesimale del tempo, la quale comune a tutti i popoli civili, diveniva veneranda nel sistema cosmopolitico che allora vagheggiava in nazione francese. Or l'astronomo ed il marinaio, costretti a dover continuamente tradurre le quantità angolari in orarie e viceversa, non potevano entrare nelle vedute chimeriche di quella Commissione, ed essendo in possesso dell'antica divisione del tempo, dovevano necessariamente rigettare la divisione centesimale del cerchio.

mo ancora che l'unità di peso fosse del pari indipendente da quella di lunghezza; ed ecco che sarebbe impossibile determinare anticipatamente il peso di un pezzo di ferro fuso che avesse certe date dimensioni, quello di un masso di marmo di conosciuto volume, ec. Nè in tale ipotesi sarebbe possibile risolvere tutte quelle quistioni, nelle quali si tratta di calcolare il volume di un corpo dietro la conoscenza del suo peso e della sua densità.

Ed oltre a questa utilità aritmetica, poichè riguarda la possibilità dei calcoli, una ragione di stabilità si trae ancora dalla mutua dipendenza di tutti gli elementi di un sistema metrico. Fingiamo per poco che per incuria di conservarne i campioni, o per qualsiasi altra cagione, tutti eccetto un solo ne andassero perduti; egli è facile comprendere come non sarebbe allora malagevole ripristinare l'intero sistema dietro la conoscenza delle relazioni che ne congiungevano i diversi elementi.

4^a — *L'unità lineare deve avere un modulo in qualche fatto costante dell'Universo* — Il sistema metrico di un popolo non interessa il solo Commercio, ma la Geografia ancora, la Statistica, l'Economia, la Fisica, l'Astronomia, ec. E perciò avviene che parecchie quistioni insorte circa lo stato di talune scienze presso i popoli dell'antichità restino insolubili pel difetto di un'esatta conoscenza dei loro pesi e misure. La cui base, quantunque non fosse stata interamente convenzionale, purtuttavia non avendo tolto dalla Natura che una prima approssimazione, come il piede, il cubito, ec. non si è potuta più riprodurre collo stesso valore, dopochè dispersi i campioni delle misure, restarono ancora distrutti i monumenti dai quali si avrebbero potuto rilevare. Ma se in vece quelle unità, oggi incognite, avessero potuto avere un rapporto esatto colla lunghezza del meridiano terrestre, o con quella del pendolo che batte i secondi ad una certa latitudine, ec. allora la perdita dei campioni non avrebbe portata seco quella del sistema, poichè basterebbe rifare le stesse operazioni donde fu tratto, per richiamarlo nuovamente in vita.

CAPO SECONDO.

*Esposizione del sistema metrico del Regno delle Due Sicilie
e del sistema metrico francese.*

170. Una legge del 6 aprile 1840 ha fissato il nostro sistema metrico * nel seguente modo.

Unità lineare è il palmo ³, eguale alla settemillesima parte di

1 Prima che fosse promulgata questa legge, il nostro sistema metrico non era che una tradizione di quello, che già esistente da tempo remotissimo nella città di Napoli, fu ristabilito per le provvide cure di Ferdinando I. di Aragona, il quale con un editto del 6 aprile 1480 prescriveva che fosse comune a tutte le provincie del Regno. Della quale ristaurazione aragonese esiste tuttavia un monumento in un masso parallelepipedo di marmo, in cui furono incavati i campioni delle misure, e che guasto e logoro dal tempo or giace nel cortilo di Castelcapuano.

Gli stessi disordini, nascenti dalle alterazioni delle misure nelle diverse provincie del Regno, che determinarono il Principe aragonese a dover provvedere alla loro uniformità, hanuo richiamato a giorni nostri lo paterno cure dell'Augusta Famiglia regnante sullo stesso obbietto. Ferdinando I di sempre gloriosa memoria, avendo dato alla Sicilia nel 1809 un sistema uniforme di pesi e misure, e volendo che di egual beneficio godessero i suoi sudditi di qua dal Faro, ne diede incarico al P. Piazzì, come quello ch'essendo di elevato ingegno avrebbe potuto dar soddisfacente soluzione ad un problema di sì alta importanza. Ma sventuratamente il celebre astronomo non si elevò all'altezza del subbietto che trattava, e le sue idee discusse dalla Consulta di Stato, oppognate dai Consigli provinciali, finirono coll'esser del tutto dimenticate.

Fu allora che il Generale Visconti, meditando su i progetti del P. Piazzì, venne in pensiero che si sarebbe potuto dare al nostro sistema metrico una perfetta dipendenza dall'unità lineare, alterando di una quantità presso che insensibile taluni suoi elementi. Svolgendo questo suo concetto in una Memoria che lesse alla Reale Accademia delle scienze nel 1828, diede origine ad una serie di discussioni che in fine motivarono la legge del 6 aprile 1840, la quale renderà immortale il nome dell'Augusto Re (N. S.) Ferdinando II.

2 Una Commissione fu nominata nel 1811 per comparare i campioni delle nostre misure a quelle del sistema metrico francese, e fu trovato il nostro pal-

un minuto primo medio del meridiano terrestre; e si divide in parti decimali — La canna si compone di 10 palmi, ed il miglio di 7000 palmi.

mo equivalente a millimetri 263,87. Or volendo stare all'antichissima definizione del palmo, ch'è quella di 7000^a parte del miglio geografico di 60 a grado, ne segue (Vedi n° 173) che 378 palmi debbono equivalere a 100 metri, e quindi un palmo equivalerà a $\frac{100}{378}$ di metro, ossia a millimetri 264,55; valore che differisce di $\frac{1}{300}$ circa dal precedente. Ed ancorchè il campione adoperato dalla Commissione del 1811 fosse stato il vero campione aragonese (ciò che vedremo essere improbabile), e che in conseguenza la frazione $\frac{1}{300}$ dovesse riguardarsi come differenza tra i valori della 7000^a parte del minuto medio, ottenuti l'uno sul finire del secolo 18° dai più grandi geodeti di quel tempo, e l'altro nell'Italia meridionale al Medio Evo, purtuttavia resteremmo compresi dalla più alta meraviglia, come presso noi, mentre tutta l'Europa era barbara, si fosse potuto approssimare così da vicino al vero valore di una certa parte aliquota del meridiano terrestre.

Ma la nostra meraviglia crescerà a mille doppi, quando sapremo che il Generale Visconti ha dimostrato il vero palmo aragonese esser quello di millimetri 264,55. Nelle sue prime ricerche, che abbiamo accennato nella nota precedente, egli supponeva che la mezzacanna adoperata dalla Commissione del 1811 fosse stata il vero campione aragonese; e quindi egli opinava doversi aumentare il nostro palmo di quel trecentesimo, per metterlo di accordo colla sua definizione, e che altre piccole alterazioni si dovessero apportare negli altri elementi del sistema, perchè tutti con semplici rapporti fossero ligati all'unità lineare. Ma quando, dietro rapporto dell'Accademia all'Eccellentissimo Ministro degli Affari Interni, il suo progetto meritò di fissare l'attenzione del Governo, e che in conseguenza ebbe facoltà di fare tutte quelle ricerche che l'importanza del subbietto richiedeva, allora egli conobbe chiaramente che il vero sistema aragonese lungi dal ritrovarsi nei campioni esistenti, non era che una divinazione da farsi. Imperocchè un'antica consuetudine faceva riguardare i campioni delle nostre misure come proprietà non dello Stato, ma della Città di Napoli, la quale dando in appalto il diritto di *campionatura*, lasciava agli appaltatori la cura di custodirli, ed anche rinnovarli, quando fossero logori dal tempo; quindi per un azzardo, quasi che inconcepibile, i campioni esaminati nel 1811 potevano equivalere esattamente a quelli costruiti nel secolo XV. Il Visconti ebbe allora a mutare il disegno del suo primo concetto, poichè ciò che aveva dapprima riguardato come un'utile riforma del sistema aragonese, diveniva una restituzione al suo primitivo perfezionamento; nella quale idea eb-

Unità di superficie è la canna quadrata, ed unità di volume la canna cubica.

Unità di superficie per le misure agrarie, è il moggio; quadrato che ha 100 palmi di lato, e si divide in parti decimali.

Il tomolo è misura di capacità per gli aridi, come biade, legumi, ec. Equivale a tre palmi cubici, e si divide in 2 mezzette, o 4 quarte, o 24 misure.

Per taluni liquidi è misura di capacità il barile, equivalente ad un cilindro retto a base circolare, che avesse 1 palmo di diametro e 3 palmi di altezza: si divide in 60 caraffe.

Unità di peso è il rotolo, il quale si divide in parti decimali, e la sua millesima parte è il trappeso ¹. Cento rotoli formano il cantaro.

Tra l'unità di peso e l'unità di volume esiste la relazione che sotto la temperatura di 16°, 144 centigradi, e la pressione atmosferica di 28 pollici, ossia palmi 2,865 un palmo cubico di acqua distillata pesa in Napoli al livello del mare rotola 20 e 736 trappesi. ²

be vieppiù a riferirsi, come si fece più addentro in tali ricerche (Vedi la sua opera: DEL SISTEMA METRICO DELLA CITTÀ DI NAPOLI ec. pubblicata nel 1838). Ed in tal modo il General Visconti colla sua divinatoria del vero sistema aragonese ha, per così dire, dissotterrato un meraviglioso monumento della nostra antichissima civiltà.

1 Questa voce è derivata da *tari-peso*, poichè nel tempo dei nostri principi normanni l'unità di moneta era il peso di un'oncia di oro che si divideva in 30 *tari*, e ciascuno di questi in 20 *grani*; e poichè l'oncia peso si divideva ancora in 30 parti ciascuna delle quali si suddivideva in 20 *acini* o *grani*; quindi si chiamava *tari-peso* la 30^a parte dell'oncia peso.

2 Partendo dai risultamenti di Hallström sulla dilatazione dell'acqua, il Generale Visconti ha trovato che 30 once cubiche di acqua distillata, alla temperatura di 16°, 1875 del termometro centigrado, in Napoli a livello del mare o sotto la pressione di 0^m, 76, pesano una libbra della Regia Zecca; quindi un'oncia cubica della stessa acqua peserà $\frac{12}{30} = \frac{4}{10}$ di un'oncia peso. Ma $\frac{4}{10}$ di un'oncia, ossia 4 dramme, equivalgono a 12 trappesi; dunque il trappeso equivale al peso della 12^a parte di un'oncia cubica di acqua distillata, pesata sotto le condizioni sopradette. Or l'oncia, secondo l'antica divisione, è la 12^a par-

L'unità di peso per gli usi farmaceutici è la libbra di 360 trappesi. Essa si divide in 12 once; l'oncia in 10 dramme; la dramma in 3 scrupoli; e lo scrupolo in 20 granelli.

171. Diversi elementi del sistema metrico della Città di Napoli sono stati aboliti dalla legge del 6 aprile 1840. Oltre la *canna* di 8 palmi, ciascuno dei quali si divideva in 12 *once*, e l'oncia in 5 *minuti*, vi erano

— 1° Un *passo agrario* di palmi $7\frac{1}{3}$, ed un altro geodetico di palmi 7, usato dai nostri antichi architetti, e che poi fin dal 1816 si trovava introdotto nelle operazioni spettanti al Real Ufficio topografico, dietro proposta fattane dal Visconti.

— 2° Il *moggio*, quadrato che aveva 30 passi agrari di lato; e che si divideva in 10 *quarte*, ciascuna delle quali conteneva 9 *nonne*; ogni nona si suddivideva in 5 *quinte*, ed ogni quinta in due *passi quadrati*.

te di un palmo; quindi un palmo cubico sarà equivalente a $12^3 = 1728$ once cubiche; e ciascuna di queste in acqua distillata pesando 12 trappesi, le 1728 once cubiche peseranno $1728 \times 12 = 20736$ trappesi, vale a dire 20 rotola e 736 trappesi.

Questo risultamento coincide a capello coll'ipotesi del Visconti sulla vera lunghezza del palmo aragonese — 1° Perchè la suindicata relazione tra l'unità di peso e l'unità di volume non ha luogo, che ponendo il palmo eguale a millimetri 264,33 — 2° Perchè ha luogo nel sistema di divisione dodicesimale, preferita dagli antichi — 3° Perchè la si trova sotto la temperatura di circa 16° centigradi, ch'è appunto la media annuale di Napoli.

Nè sarebbe una forte obbiezione quella che facesse rilevare esser gratuita la supposizione di ammettere che nella ristaurazione aragonese si fosse pensato a collegare tutti gli elementi del sistema metrico all'unità lineare; poichè troviamo che questo principio ha regolato l'ordimento di ogni sistema metrico, di cui la storia ci ha tramandato la descrizione. Così quello dell'antico Egitto toglieva per base il *cubito reale*; il cubo fatto sulla metà della sua lunghezza, costituiva l'unità di volume; un egual volume di acqua rappresentava l'unità di peso, e questo peso in argento era l'unità di moneta.

Donde poi si rileva che il più forte argomento messo innanzi dal Visconti sulla vera lunghezza del palmo aragonese sia stato quello di far conoscere per mezzo di quell semplici relazioni il tomolo ed il barile sono collegati al palmo di millimetri 264,33.

— 3° La *decina* ¹ equivalente a quattro rotoli, ed il *peso* equivalenti a 40 rotoli.

— 4° Lo *staio*, misura di capacità per l'olio, e ch'era un recipiente capace di rotola $10 \frac{1}{3}$ di olio lampante. Si divideva in 16 *quarti*, ed ogni quarto in 6 *misurelli*. Sedici *staia* formavano la *salma*.

— 5° La *canna di costumanza*, la quale era un parallelepipedo di una canna quadrata di base e 2 palmi di altezza, e perciò equivaleva a 128 palmi cubici.

— 6° La *canna da legna*, la quale era un parallelepipedo avente una canna quadrata di base e 4 palmi di altezza.

— 7° La *caraffa a minuto* di 66 a barile, mentre quella di 60 a barile conservata dalla legge del 6 aprile, andava denominata *caraffa da Zecca*.

172. Il sistema metrico francese ² è poi ordinato nel seguente modo.

1 Nelle Istruzioni inviate da Ferdinando I di Aragona al Tesoriere delle Calabrie relativamente al diritto da esigersi pel marchio delle diverse misure, si parla del peso di 4 rotoli sotto il nome di *decina*. Di questa denominazione il Visconti assegna la seguente origine. Essendo una libbra equivalente al peso di 80 once cube di acqua, quello di 4 rotoli ossia di once $133 \frac{1}{3}$ sarà equiva-

lente al peso di $333 \frac{1}{3}$ once cube di acqua; ma il numero $333 \frac{1}{3}$ rappresenta il numero delle once di peso contenute in 10 rotoli; quindi il peso di 4 rotoli è chiamato *decina*, perchè equivale al peso di tante once cubiche di acqua, quante sono le once peso contenute in 10 rotoli.

Or queste relazioni cessano di aver luogo supponendo il palmo diverso da quello di millimetri 264,33; e perciò il Visconti ne trae novello argomento a favore di questa lunghezza, ch'egli attribuisce al palmo aragonese.

2 Fino a Carlo Magno la Francia non ebbe che misure romane diversamente modificate. Questo Principe diede alla nazione un sistema uniforme di pesi e misure, la cui base, denominata *pie-de-di-re* o *pie-de di Parigi* si divideva in 12 pollici ed ogni pollice in 12 linee. Ma l'uniformità ben presto scomparve per opera specialmente dei grandi feudatari della corona; alcuni dei quali aumentavano il valore assoluto delle misure per ottenere un censo più grande dai loro vassalli; altri invece le diminuivano per attrarre sulle loro terre un numero maggiore di abitanti. Parecchi sovrani successivamente cercarono ristabilire nelle provincie i pesi e le misure della Città di Parigi, ma infruttuosi riusci-

Base del sistema è il metro, equivalente in lunghezza alla diecimillesima parte del quarto del meridiano terrestre.

Unità di superficie per le misure agrarie è l'ara, quadrato fatto sopra un lato di 10 metri.

Unità di volume è il litro, cubo che ha per lato la decima parte del metro — Vi è ancora il metro cubico, che prende il nome di stero, quando serve alla misura delle legna, del carbone, ec.

Unità di peso è il grammo, equivalente al peso di un cubo di acqua distillata alla temperatura di $4^{\circ},1$, avente per lato la centesima parte del metro.

rono i loro tentativi, ed il disordine continuò ad aver luogo fino al terminare dello scorso secolo.

Un decreto emanato dall'Assemblea nel maggio 1790 portava che il Re di Francia dovesse impegnare il Re d'Inghilterra di unire ai dotti scelti nel seno dell'Accademia francese un egual numero di dotti della Società Reale di Londra, perchè uniti avessero determinato la lunghezza del pendolo che batte i secondi alla latitudine di 45° ed a livello del mare. Il turbine politico impedì quell'unione; e la Commissione dei dotti francesi ammettendo la possibilità di creare un sistema metrico comune a tutti i popoli civili, abbandonò la felice idea di prendere dalla lunghezza del pendolo la nuova unità lineare, temendo che non fosse adottata dalle nazioni, la cui posizione geografica rendeva estranea alla latitudine di 45° . Si volle una base veramente universale, e si stabilì che nuova unità lineare sarebbe la diecimillesima parte del quarto del meridiano terrestre.

Le quistioni insorte sulla figura della terra, considerata nei suoi rapporti coll'attrazione newtoniana, avevano dato occasione alla misura di parecchi archi del meridiano in diverse contrade; ma si voleva una misura più esatta ed eseguita sopra un arco più grande. Delambre e Méchain furono quindi incaricati di misurare l'arco del meridiano di Parigi da Dunkerque a Barcellona, misura che i due celebri astronomi eseguirono con attività e zelo in mezzo alle orride scene della sanguinosa rivoluzione.

Nel 1790 la Francia avendo fatto novello invito alle nazioni alleate, di dotti francesi, spagnuoli, italiani, olandesi, danesi, ec. si compose una vasta Commissione, la quale solennemente discutendo le basi del nuovo sistema metrico fissò la lunghezza della nuova unità lineare, il metro, a linee 443,296 che la legge del 10 dicembre 1790 dichiarò legale. Ma delle ricerche posteriori di Delambre hanno richiesto una correzione sulla lunghezza del metro, dimodochè i dieci milioni di metri componenti il quarto della lunghezza del meridiano equivalgono a 10060724 metri legali.

Unità di moneta è il franco, pezzo di argento del peso di 5 grammi a 0,9 di fino.

Eccetto il franco che semplicemente si divide in 100 centesimi, tutte le altre unità hanno diversi multipli e summultipli decimali. I nomi dei primi si formano premettendo ai nomi delle diverse unità le denominazioni greche dei numeri 10, 100, 1000, 10000, che sono *deca* (*dieci*), *etto* (cento), *chilo* (mille), *miria* (diecimila); pei summultipli poi si premettono le voci *deci*, *centi*, *milli*. Quindi *decametro*, *ettolitro*, *chilogrammo*, *miriametro*, esprimono 10 metri, 100 litri, 1000 grammi, 10000 metri; al contrario *decimetro*, *centilitro*, *milligrammo* significano un decimo di metro, un centesimo di litro, un millesimo di grammo.

173. Conosciute le relazioni che hanno col meridiano terrestre il metro ed il palmo, è facile determinare il loro mutuo rapporto. Sappiamo che il miglio, 60^a parte del grado medio, ed in conseguenza 5400^a parte del quarto di meridiano, si compone di 7000 palmi; in conseguenza il quarto del meridiano equivalerà in lunghezza a

$$5400 \times 7000 = 37\,800\,000 \text{ palmi.}$$

Ma il quarto del meridiano equivale ancora 10 000 000 di metri;

$$\text{dunque} \quad 10\,000\,000^m = 37\,800\,000^p;$$

$$\text{quindi} \quad 1^m = 3^p,78.$$

Determinata la relazione che passa tra le basi dei due sistemi, non è malagevole definire quelle degli altri elementi. Così avremo

$$1^{\text{litro}} = (0^m,1)^3 = (0^p,378)^3 = 0^{\text{p.c.}},054010152,$$

$$\text{ed} \quad 1^{\text{ettolitro}} = 5^{\text{p.c.}},4010152.$$

Ma un tomolo vale 3 palmi cubici; dunque l'ettolitro è al tomolo nella ragione di 5,4010152 a 3, vale a dire che

$$1^{\text{ettolitro}} = 1^{\text{tom.}},8003384.$$

Similmente abbiamo ch'essendo un'ettara eguale a 100 volte il quadrato di 10 metri, ossia a 10000 metri quadrati, avremo

$$1^{\text{ettara}} = 100(37^p,8)^2 = 100.1328^{\text{p.q.}},64 = 132864^{\text{p.q.}}.$$

Un moggio legale vale daltronde 10000 palmi quadrati; dunque

$$1 \text{ etara} = 13^{\text{mog.}} . 2864.$$

Finalmente con un calcolo analogo, ed avendo ancora riguardo alla differenza di latitudine e di temperatura nella determinazione del rotolo e del chilogrammo, si avrebbe

$$1 \text{ chil.} = 1^{\text{rot.}} . 122\ 338.$$

TAVOLA DI MISURE.

MISURE LINEARI.

	METRI.	PAL. NAP.
Amburgo — <i>piede del Reno</i>	0,313854	1,186368
Amsterdam { <i>piede</i>	0,283	1,070
{ <i>auna</i>	0,6903	2,6093
Anversa — { <i>piede</i>	0,286	1,081
{ <i>auna per la seta</i>	0,694	2,623
{ <i>auna per la lana</i>	0,684	2,586
Austria — <i>klafter</i> o tesa composta di 6 piedi	1,896614	7,169201
Bade (Gran Ducato) — <i>auna</i> di 2 piedi	0,600000	2,268000
Bologna — <i>piede</i>	0,3801	1,4368
Cararra — <i>palm</i> o pei marmi	0,24927	0,94224
Copenaguen — <i>auna</i>	0,6276	2,3723
Costantinopoli — <i>pic</i> piccolo pei panni	0,648	2,449
Dresda — <i>auna</i>	0,5663	2,1414
Ferrara — <i>piede</i>	0,4039	1,5267
Firenze — <i>braccio</i>	0,58366	2,20623
Francoforte — <i>auna</i>	0,5473	2,0688
Genova — <i>palm</i> o	0,2491	0,9416
Ginevra — { <i>piede</i>	0,4879	1,8443
{ <i>auna</i>	1,144	4,324
{ <i>piede</i>	0,306	1,137
Grecia — { <i>piede olimpico</i> antico, $\frac{1}{6000}$ del mi-		
{ <i>glio</i> di 60 a grado	0,30859	1,16647
{ <i>piede pizio o delfico</i> antico, $\frac{4}{9}$ dell'o-		
{ <i>limpico</i> ,	0,24657	0,93317
Inghilterra { <i>piede</i> composto di 12 <i>once</i> o pollici, ed		
{ <i>il pollice</i> di 10 linee	0,3047945	1,1521232
{ <i>yard</i> composto di 3 piedi	0,9143835	3,4963696
{ <i>fathom</i> o tesa di 6 piedi	1,8287670	6,9127392
Lisbona — <i>cara</i> o <i>auna</i>	1,093	4,132
Losanna — <i>tesa</i> composta di 10 piedi	3,000000	11,310000
Madrid — <i>cara</i> o <i>auna</i> di Castiglia composta di 3 piedi	0,848	3,203

		METRI.	PAL. NAP.
Mantova	— <i>pie</i> de	0,4669	1,7649
Milano	— { <i>braccio</i> comune	0,594936	2,248858
	{ <i>pie</i> de agrimensorio	0,435185	1,644999
Modena	— <i>pie</i> de.	0,5230	1,9769
Monaco	— <i>auna</i>	0,833	3,149
Padova	— <i>pie</i> de.	0,3574	1,3510
	{ <i>pie</i> de	0,3248394	1,2278929
Parigi	— { <i>auna</i>	1,188446	4,492326
	{ <i>metra</i>	1,0000000	3,7800000
Presburgo	— <i>auna</i>	0,5581	2,1096
Prussia	— { <i>pie</i> de del Reno	0,313854	1,186368
	{ <i>auna</i> nuova	0,6669	2,5209
Berlino	— { <i>pie</i> de antico	0,310	1,172
	{ <i>auna</i> antica	0,6677	2,5239
Reggio di Modena	— <i>pie</i> de.	0,5309	2,0068
	{ <i>pie</i> de	0,297890	1,126047
	{ palmo, $\frac{3}{4}$ del <i>pie</i> de	0,223422	0,844535
Roma	— { <i>pie</i> de antico, $\frac{1}{3 \dots}$ del miglio di 75		
	{ a grado.	0,29625	1,11982
	{ cubito, di <i>pie</i> di $1 \frac{1}{2}$ corrispondente a		
	$\frac{1}{1 \dots}$ della lega di 25 a grado.	0,44437	1,67072
Russia	— { <i>pie</i> de, eguale al <i>pie</i> de inglese, compo-	0,3047945	1,152123
	{ <i>archina</i> , formata di 28 pollici inglesi	0,7111872	2,688288
	{ <i>sagene</i> , composta di 7 <i>pie</i> di	2,1335613	8,064862
Sardegna	— { <i>palmo</i>	0,248	0,937
	{ <i>raso</i> o <i>auna</i>	0,549	2,075
Sicilia	— <i>palmo</i>	0,238098	0,975610
Svezia	— { <i>pie</i> de	0,297	1,123
	{ <i>auna</i>	0,594	2,245
	{ <i>pie</i> de detto <i>liprando</i> , composto di 12		
Torino	— { once, ed eguale a $\frac{1}{4 \dots}$ del <i>miglia</i>		
	{ di 45 a grado.	0,5137	1,9418
	{ <i>raso</i> , composto di 14 once del <i>pie</i> de.	0,5994	2,2657
Varsavia	— <i>auna</i>	0,5846	2,2098
Venezia	— <i>pie</i> de	0,3474	1,3132
Verona	— <i>pie</i> de.	0,3429	1,2962

MISURE ITINERARIE *

	METRI	NUMERO per grado
Allemagna { <i>miglio</i>	7408	15
{ <i>lega</i>	9260	12
Amburgo — <i>miglio</i> di 24000 piedi del Reno	7532	14 3/4
Austria — <i>miglio</i> di 24000 piedi austriaci	7586	14 2/7
Bade (Gran Ducato) — <i>lega</i> di $12 \frac{1}{8}$ a grado	8890	12 1/2
China — <i>miglio</i> detto <i>li</i>	577	102 3/5
Copenaghen — come Amburgo.		
Francia { <i>miriametro</i>	10000	11 1/3
{ <i>lega</i> di 25 a grado	4443	25
{ <i>lega marina</i> di 20 a grado, usata anche in Olanda, in Portogallo ed in Polonia	8556	20
{ <i>stadio olimpico</i> di 600 piedi olimpici, equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado	185	600
Grecia antica { <i>stadio pizio o delfico</i> di 600 piedi delfici, equivalente ad $\frac{1}{10}$ del miglio di 75 a grado	148	750
Italia — <i>miglio</i> di 60 a grado, usato come <i>miglio marino</i> da diverse nazioni, e specialmente dalla Francia, dall'Inghilterra e dall'Austria	1851,9839	60
Inghilterra — <i>miglio</i> di 1760 yards.	1609	69
Polonia — <i>miglio</i> di 20 a grado	5556	20
Portogallo — <i>lega terrestre</i> di 18 a grado	6173	18
Prussia — { <i>miglio</i> di 24000 piedi del Reno	7532	14 3/4
{ <i>miglio</i> di 15 a grado prima del 1816	7408	15
Roma — <i>miglio</i> di 1000 passi, ciascuno di 5 piedi	1489	74 5/8
Roma antica { <i>miglio</i> di 75 a grado, composto di 1000 passi, ciascuno di 3 piedi antichi.	1481	75
{ <i>stadio</i> , $\frac{1}{8}$ del miglio, ed eguale a $\frac{1}{10}$ del miglio di 60 a grado	185	600
Russia — { <i>wersta</i> di 1500 archine, ossia di 3500 piedi inglesi	1067	104 1/7
{ <i>miglio finlandico</i> di 10 werste	10668	105 1/2
{ <i>lega itineraria</i> di 8000 vare	6784	16 3/8
Spagna — { <i>lega marina</i> di $17 \frac{1}{2}$ a grado	6350	17 1/2
Svezia — <i>miglio</i> di $10 \frac{2}{3}$ a grado	10417	102 2/3
Torino — <i>miglio piemontese</i> di 4800 piedi	2406	48
Turchia — <i>miglio</i> detto <i>berri</i>	1670	60 7/13

1 Nella tavola precedente si è preso il metro legale: in questa il metro secondo la correzione di Delambre equivalente a metri legali 1,0000725.

MISURE DI SUPERFICIE.

	ARE.	NUMERO per miglio quadrato.
Austria — <i>yuchart</i> di 1600 <i>klafter</i> quadrati . . .	57,5343	395 11/13
Grecia antica — <i>plettro</i> di 10000 piedi olimpici quadrati . . .	9,323	3601 1/3
Inghilterra — <i>acre</i> di 4840 <i>yards</i> quadrati . . .	40,4671	847 4/9
Madrid — <i>fanegada</i> (pei campi) di 500 <i>estadales</i> quadrati . . .	48,34	709 3/7
Madrid — <i>uvarizada</i> (pei vigneti) di 400 <i>estadales</i> quadrati . . .	38,67	886 4/3
(l'estadale è una lunghezza di vare $3\frac{2}{3}$)		
Milano — <i>pertica</i> di 24 <i>tavole</i> , ognuna di 144 piedi quadrati . . .	6,5452	5239 1/2
Parigi — <i>arpent</i> (misura antica) di 100 <i>perche</i> quadrate; ogni <i>perche</i> lineare di 18 piedi . . .	34,18869	1003 1/13
Prussia — <i>morgen</i> di 180 <i>perche</i> quadrate; la <i>perche</i> lineare di 12 piedi del Reno . . .	23,5323	1343 1/7
Roma — <i>pezza</i> di 16 <i>catene</i> quadrate; la <i>catena</i> lineare essendo di palmi $57\frac{1}{2}$. . .	26,4062	1298 9/13
Roma antica — <i>jugero</i> di 28800 piedi antichi quadrati . . .	23,2761	1336 3/4
Russia — <i>deciatine</i> di 2400 <i>sagene</i> quadrate . . .	109,25000	313 9/10
Sicilia — <i>salma</i> di 4096 <i>canne</i> quadrate . . .	174,6259	496 5/13

MISURE DI CAPACITÀ.

	LITRI.	TOM. NAP.	CARAFFE. legali.
Grecia antica — <i>anfora attica</i> , equivalente a $\frac{1}{2}$ del cubo di $\frac{24}{25}$ di un piede olimpico . . .	39,00	0,72013	53,639
Inghilterra — <i>gallone imperiale</i> . . .	4,543438	0,00000	0,249
Inghilterra — <i>bushel</i> di 8 <i>galloni</i> per gli aridi . . .	36,347664	0,634373	0,000
Inghilterra — <i>quarter</i> di 8 <i>bushels</i> . . .	290,781312	5,234968	0,000
Napoli — <i>tomolo</i> per gli aridi, di 3 pal. cub. nap. . .	53,545113	1,000000	0,000
Napoli — <i>barile</i> , pel vino, eguale a 3 palmi cilindrici . . .	43,625030	0,783398	60,000
Parigi — <i>setier</i> , misura antica composta di 12 <i>boisseaux</i> (6 <i>anf. ant. rom.</i>) . . .	156,000	2,8083	214,536
Parigi — <i>tonnellata</i> di mare, che considerata in volume, equivale a 42 piedi francesi cubici, ossia metri cubi 1,44 . . .			
Roma antica — <i>anfora</i> eguale al cubo del piede romano antico . . .	26,000	0,46809	35,759

Sicilia	rotolo per gli aridi, equiva-			
	valente ad un palmo cubo si-			
	ciliano	17,193053	0,309533	...
	barile pel vino, equivalente a 2			
	palmi cubi siciliani	34,386106	0,619066	47,293

PESI.

		CHIL. GR.	ROT. NAP.
Ambargo — libbra		0,4843	0,5133
Amsterdam — libbra di 16 once		0,494	0,534
Anversa — libbra		0,47016	0,52768
Austria — libbra		0,5600	0,6283
Bade (Gran Ducato) — libbra		0,500000	0,561169
Copenaguen — libbra		0,4994	0,5605
Costantinopoli — oka o rotolo grosso		1,27	1,43
Dresda — libbra		0,467	0,524
Firenze — libbra		0,339342	0,381081
Genova — libbra		0,317	0,356
Grecia antica — mina attica, o libbra eguale a $\frac{1}{120}$			
del peso di un volume di acqua piovana corri-			
spondente all'anfora attica		0,3259	0,3657
Inghilterra	libbra troy composta di 12 once, ognuna di 480 grani	0,373096	0,418740
	libbra avoirdupois eguale a 7000 grani troy	0,453415	0,508885
	la tonnellata di mare è composta di 20 quintali, ognuno di 112 lib. avoirdupois, ed equivale a chil. $1015 \frac{2}{3}$ ossia a cantata nap. 11,40.		
Lisbona — libbra		0,4588	0,5149
	arroba, peso di 32 libbre.		
Losanna — libbra 16 once		0,500000	0,561169
Madrid — libbra		0,460	0,516
Milano — libbra grossa di 28 once		0,762517	0,838902
	libbra piccola di 12 once	0,326793	0,366772
Napoli — rotolo, eguale a $\frac{4}{12}$ del peso di un volume di acqua distillata corrispondente al cubo di $\frac{5}{6}$ di palmo, alla temperatura di $16 \frac{1}{6}$ centigradi e sotto la pressione bar. di 28 pollici		0,890007	1,000000
Parigi — libbra antica, detta di marco, composta di 16 once, ogni oncia di 8 grossi, ed ogni grosso di 72 grani		0,489506	0,549391
Prussia — libbra eguale a $\frac{1}{66}$ del peso di un piede cubo del Reno di acqua distillata, alla temp. 13° Réaumur		0,467711	0,380

Libbra —	libbra attuale	0,389	0,524930
	libbra antica, eguale $\frac{1}{80}$ del peso di un		
	anfora, ossia di un piede cubo antico, di		
	acqua piovana	0,3258	0,3657
Russia —	libbra della zecca	0,409367	0,439448
Sicilia —	rotolo	0,79342	0,89049
Svezia —	libbra detta victualia	0,423	0,477
Torino —	libbra	0,368845	0,413969
Varsavia —	rubbo, peso di 25 libbre	0,405	0,435

TAVOLA DEI VALORI DI DIVERSE MONETE AL PARI. ¹

	FRANCHI	DEC. NAP.
Amsterdam — fiorino di nuovo conto	2,14	0,504
Austria —	{lira austriaca	0,863
	{fiorino di 3 lire	2,595
	{risdallero di 2 fiorini	5,19
Bade (Gran Ducato) — fiorino	2,12	0,491
Baviera — fiorino d'impero, moneta di conto	2,16	0,508
Belgio {fiorino corrente, antica moneta di conto	1,82	0,428
	{franco nuova moneta	1,00
Copenaguen — risdallero	5,66	1,332
Costantinopoli {pezza di 5 piastre del 1811	4,14	0,974
	{una borsa vale 500 piastre	
Firenze — lira	0,84	0,198
Francoforte {risdallero o tallero di 90 kreutzers	3,90	0,918
	{fiorino di 60 kreutzers	2,60
Genova — lira	0,835	0,196
Grecia antica	{dramma, unità monetaria	0,93
	{mina di 100 dramme	92,68
	{talento d'argento di 60 mine	5561,
	{talento di oro di 600 mine	55609,
Inghilterra — lira sterlina di 20 scellini	25,208	5,931
Milano —	{lira austriaca	0,863
	{lira antica	0,76
Napoli — ducato di 100 grana	4,25	1,000
Piemonte — {lira nuova eguale al franco	1,00	0,235
	{lira antica	1,18
Polonia — risdallero	5,19	1,221
Portogallo — cruzada nuova di 480 reali	2,94	0,692
Prussia — scudo, risdallero o tallero	3,71	0,873
Roma — scudo	5,36	1,261
Roma antica	{sesterzio o nummus, unità monetaria	0,20
	{denaro di 4 sesterzi	0,81
	{aureo di 25 denari o 100 sesterzi	20,38
	{talento grande di 32000 sesterzi	6522,
	{talento piccolo di 24000 sesterzi	4491,
Russia — rublo	4,00	0,941
Sardegna — come il Piemonte		

¹ Vale a dire secondo la quantità dell'argento o oro puro che contengono.

Spagna <i>(reale di plata.</i>	0,573	0,128
<i>(reale di veglione, metà del precedente.</i>	0,271	0,064
Venezia — <i>zecchino.</i>	11,93	2,812

CAPO SECONDO.

Calcolo dei numeri complessi.

174. I numeri esprimenti quantità di multipli e summultipli delle diverse unità di un sistema metrico, vanno sotto il nome di *numeri complessi* o *denominati*. Essi non richieggono speciali regole di calcolo, ma quelle medesime dei numeri interi, modificate soltanto dal diverso sistema di numerazione, in quanto che può non esser decimale; poichè nel caso opposto le regole sono precisamente le stesse.

175. *Addizione* — Se i numeri, di cui si cerca la somma, si riferiscono ad unità, i cui multipli e summultipli seguono la progressione decimale, allora l'addizione sarà la stessa che quella degli interi uniti a fratti decimali. Poniamo, per esempio, che si volesse la somma di

duc.	gra.
27	, 85
9	, 67
136	, 43
94	, 08
duc.	268 , 03

Perchè nel nostro sistema monetario 10 *grana* formano il *carlino*, e 10 carlini il *ducato*, noi scriviamo i numeri dati come fossero interi uniti a fratti decimali; e cominciando dalle unità di grana per indi passare alle unità di carlini, ed in fine alle unità, decine ec. di ducati, avremo la somma richiesta in ducati 268 e grana 3.

Ma se l'ordinamento dei multipli e summultipli dell'unità, a cui si rapportano i numeri dati, fosse diverso dal decimale, allora nel passare dall'addizione di una colonna di unità inferiori a quella delle unità immediatamente superiori, in vece di recarvi le decine

ottenute, vi apporteremo quei multipli delle unità inferiori, che formano per la nota legge del sistema altrettante unità immediatamente superiori. Così supponiamo dover addizionare diverse quantità di *canne*, *palmi*, *once* e *minuti* secondo l'antico nostro sistema metrico, nel quale 1 canna valeva 8 *palmi*, 1 palmo 12 *once* ed 1 oncia 5 *minuti*.

Can.	Pal.	Onc.	Mi.
9	5	7	3
4	6	10	4
7	4	8	1
12	7	11	2
35	1	2	0

Cominciando dall'addizionare i minuti troviamo la somma 10; ed essendo 5 minuti equivalenti ad 1 oncia, 10 minuti faranno 2 once; quindi scriveremo 0 sotto la colonna dei minuti, e porteremo 2 a quella delle once — Questa 2^a colonna ci dà la somma 38; e poichè 12 once formano 1 palmo, la somma ottenuta sarà equivalente a 3 palmi e 2 once: queste scriveremo sotto la colonna rispettiva, ed i 3 palmi li porteremo alla colonna seguente. Operando similmente sulla 3^a colonna, da cui risulta la somma 25, scriveremo sotto di essa 1 palmo, e le 3 canne equivalenti ai 24 palmi che restano, saranno aggiunte alla 4^a colonna, la quale ci darà la somma 35 — Così la somma richiesta sarà di 35 canne, 1 palmo e 2 once.

Similmente, conoscendo che il *giorno* si divide in 24 *ore*, l'ora in 60 *minuti primi*, ed ogni minuto primo in 60 *secondi*; come ancora che la *libbra* si compone di 12 *once*; l'oncia di 10 *dramme* la dramma di 3 *trappesi* o *scrupoli*, e lo scrupolo di 20 *acini* o *granelli*; sarà facilissimo ottenere le somme nei due esempi che seguono.

Gior.	Or.	M'.	M''.	Lib.	Onc.	Dra.	Scru.	Gra.
13	20	51	37	7	5	8	2	13
9	18	43	38	9	8	6	1	8
24	12	49	48	1	10	9	1	16
15	16	34	12	4	7	3	2	12
63	20	59	15	23	9	0	2	9

176. *Sottrazione* — Se dopo aver ordinato i due numeri complessi in due linee orizzontali in modo che i numeri di medesima denominazione sieno nella stessa verticale, si trovi che da ciascun numero della linea superiore si può sottrarre il numero corrispondente nell'inferiore; allora la sottrazione non presenterà difficoltà veruna, poichè sarà eseguita come se i numeri fossero interi astratti. Poniamo per esempio che

	da —	8 can.	6 pal.	7 on.	3 mi.
si volessero sottrarre	—	5 can.	4 pal.	3 on.	2 mi.
si avrebbe il residuo	—	3 can.	2 pal.	4 on.	1 mi.

sottraendo da ciascun numero della linea superiore quello che gli corrisponde nell'inferiore.

Ma se dallo stesso numero di

		8 can.	6 pal.	7 on.	3 mi.
si vogliano sottrarre	—	3 can.	7 pal.	9 on.	4 mi.
		4 can.	6 pal.	9 on.	4 mi.

allora cominciando dai minuti, si trova che da 3mi. non si possono togliere 4mi. Si preuderà 1on. = 5mi. dalla colonna delle once; ed i 5mi. tolti in prestito, aggiunti ai 3mi. dati, formano la somma 8mi. dalla quale sottraendo i 4mi. della linea inferiore si ha il residuo 4mi.

Similmente non potendo dalle 6on. rimaste nella linea superiore sottrarre le 9on. dell'inferiore, prenderemo dalla colonna seguente 1pal. = 12on.; ed aggiungendo queste alle 6on. che già si hanno, sottrarremo dalla loro somma 18on. le 9on. della linea inferiore, ed avremo le 9on. segnate nel residuo.

Nello stesso modo operando rispetto ai palmi, aumenteremo i 5pal. residui della linea superiore di 1can. = 8pal., e dalla loro somma 13pal. sottratti i 7pal. della linea inferiore avremo i 6pal. del residuo.

Finalmente dalle 7can. restate nella 1^a linea togliendo le 3can. della 2^a, si avranno le 4can. del residuo.

Da questi minuti particolari, a cui siamo discesi, si rileva chiaramente che siccome nella sottrazione dei numeri interi, quando da una cifra non si può sottrarre quella del medesimo ordine, bisogna aumentare la prima di 10 togliendo 1 da quella dell'ordine immediatamente superiore; così nella sottrazione dei complessi fa d'uopo che il numero, dal quale non si può sottrarre un altro della stessa denominazione, sia accresciuto di tante unità quante se ne richieggono per formare l'unità immediatamente superiore. Così se in una sottrazione di libbre, once, dramme, trappesi ed acini da analogo numero complesso, non si possono sottrarre gli acini dagli acini, bisognerà accrescere questi di tanti acini, quanti ne bisognano per formare un trappeso, e così di seguito. Vale a dire che la regola della sottrazione è la stessa pei numeri interi e pei complessi, quando si consideri nella dipendenza del residuo dal sistema di numerazione dei due numeri dati. A modo di schiarimento aggiungiamo i due esempli seguenti.

Lib.	On.	Dr.	Trap.	Ac.	Gior.	Or.	M'	M''
9	7	5	1	12	15	8	21	34
4	10	8	2	17	6	19	58	46
4	8	6	1	15	86	12*	22'	48''

177. *Moltiplicazione* — Se il solo moltiplicando è complesso, l'operazione sarà eseguita come quella dei numeri interi, avvertendo però alla speciale denominazione del complesso nel fare i riporti alle unità dell'ordine immediatamente superiore. Sia, per esempio, da determinarsi il prodotto di 5can. 7pal. 8on. e 3mi. per 9. Disposti che avremo i due fattori come qui appresso

Can.	Pal.	On.	Mi.
5	7	8	3
			9
53 ^{re} .	5 ^{pa} .	3 ^{on} .	2 ^{mi} .

cominceremo dal moltiplicare i minuti per 9, ed avremo il prodotto 27. Ma 5 minuti equivalendo a 1 oncia, i 27 minuti sa-

ranno equivalenti a 5 once + 2 minuti. Scriveremo i 2 minuti sotto la colonna corrispondente, e le 5 once le aggiungeremo al prodotto seguente. Il quale diviene così $72 + 5 = 77$ once, ossia 6 palmi + 5 once. Queste saranno scritte al luogo delle once, ed i 6 palmi saranno aggiunti al prodotto di 7 palmi per 9. Avremo in tal modo $63 \text{ palmi} + 6 \text{ palmi} = 69 \text{ palmi} = 8 \text{ canne} + 5 \text{ palmi}$. Scriveremo questi nel luogo dei palmi, e le 8 canne aggiunte alle 45 canne che risultano dalla moltiplicazione di 5 per 9, ci daranno 53 canne — Collo stesso metodo saranno calcolati i prodotti seguenti.

Lib.	On.	Dram.	Trap.	Acl.	Gior.	Or.	M'	M''
8	7	6	2	12	18	17	31	42
				8				13
69 ^l .	1 ^o .	4 ^l .	2 ^t .	16 ^a	198 ^g .	18 ^o .	20 ^j	24 ^{l'}

178. Ma se anche il moltiplicatore fosse un numero complesso allora vi sarebbero due metodi per ottenere il prodotto: l'uno è quello delle frazioni, l'altro è quello del *prendere in parti*. Incominciamo da quest'ultimo; e supponiamo che si voglia determinare il prezzo di 5 can. 7 pal. ed 8 on. a duc. 7,50 la canna ¹.

Can.	Pal.	Once.	
5	7	8	
7,50			
37,50	.	.	prezzo delle 5 canne
3,75	.	.	— di 4 palmi
1,875	.	.	— di 2 palmi
0,937	.	.	— di 1 palmo
0,468	.	.	— di 6 once
0,136	.	.	— di 2 once

Prezzo richiesto = duc. 44,686

1 Non faccia meraviglia che togliamo esempi da misure che più non esistono, poichè se la legge le ha distrutte, ha dovuto rispettare i contratti anteriori, i quali dovranno essere interpretati ed eseguiti a norma delle misure esistenti nell'epoca in cui furono fatti. Ed oltre a ciò, la storia civile e quella delle scienze sovente richieggono la cognizione delle regole di calcolo relative all'antico sistema metrico.

È facile comprendere l'andamento di questo calcolo. Una canna valendo duc. 7,50, le 5 canne valeranno 5 volte questo prezzo; quindi si è moltiplicato 7,50 per 5, e si è ottenuto il prezzo 37,50 — I 7 palmi si sono divisi in parti aliquote della canna, ossia in 4 palmi, 2 palmi ed 1 palmo. Essendo 4 palmi metà della canna, se n'è trovato il prezzo prendendo la metà di 7,50; similmente la metà di 3,75 prezzo di 4 palmi ci ha dato quello di 2 palmi, e prendendo la metà di 1,875 prezzo di 2 palmi si è ottenuto quello di 1 palmo — Le 8 once si sono similmente divise in parti aliquote del palmo, vale a dire 6 e 2 once. Le 6 once sono la metà di 1 palmo, quindi se n'è trovato il prezzo dividendo per 2 il numero 0,937 che rappresenta il prezzo di 1 palmo; e finalmente prendendo la 3ª parte di 0,468 che disegna il prezzo di 6 once, si è ottenuto quello di 2 once.

La moltiplicazione, a cui ci ha condotto la soluzione del problema, si può ancora eseguire riducendo dapprima il numero delle canne, palmi ed once in una sola espressione frazionaria di canna, che poi moltiplicheremo per 7,50. Essendo ogni canna equivalente ad 8 palmi, le 5 canne equivaleranno a 40 palmi; ai quali aggiungendo i 7 palmi dati avremo la somma 47. Moltiplicando questa somma per 12, il prodotto $56\frac{1}{2}$ ci darà il numero delle once equivalenti ai 47 palmi; e poichè sono date ancora 8 once, avremo in tutto once $56\frac{1}{2} + 8 = 572$. Or contenendosi 8 palmi in una canna, e 12 once in un palmo, la canna conterrà $8 \times 12 = 96$ once; quindi 572 once e $\frac{572}{96}$ di canna sono due espressioni equivalenti; e poichè nei dati del problema ogni canna vale duc. 7,50, $\frac{572}{96}$ di canna valeranno ducati

$$7,50 \times \frac{572}{96} = \frac{4290}{96} = 44,687.$$

179. Aggiungiamo ancora un problema analogo: *determinare il prezzo di 7 libbre, 8 once, 9 dramme e 2 trappesi a ducati 6,45 la libbra.*

Risolviamo primieramente il problema col metodo di prendere in parti, ed avremo il quadro seguente di operazione, il quale

dietro l'analisi del problema precedente non ha bisogno di schiarimento veruno.

	Lib.	On.	Dram.	Trap.
	7	8	9	2
duc. 6,43				
43,13.	.	.	.	prezzo delle 7 libbre
3,223	.	.	.	— di 6 once
1,073	.	.	.	— di 2 once
0,268	.	.	.	— di 3 dramme (4 ^a parte di 2 once)
0,107	.	.	.	— di 2 dramme (10 ^a parte di 2 once)
0,107	.	.	.	— delle altre 2 dramme
0,018	.	.	.	— di 1 trappeso (6 ^a parte di 2 dramme)
0,018	.	.	.	— dell'altro trappeso
Prezzo richiesto = duc.	—	49,968		

Volendo poi la soluzione di questo medesimo problema per mezzo delle frazioni, ridurremo le 7 libbre ad once, e ne avremo 48; alle quali aggiungendo le 8 once date, ne risulterà la somma 92. Moltiplicando questa somma per 10, e poi aggiungendo al prodotto le 9 dramme date, avremo le 92 once e 9 dramme equivalenti 929 dramme. Moltiplicheremo similmente questo numero per 3, ed al prodotto 2787 aggiunti i 2 trappesi, troveremo le 929 dramme e 2 trappesi equivalenti a 2789 trappesi. Or essendo il trappeso 3^a parte della dramma, la quale è 10^a parte dell'oncia ch'è contenuta 12 volte nella libbra, sarà il trappeso 360^a parte di quest'ultima; e quindi 7lib. 8on. 9dr. e 2trap. saranno equivalenti a $\frac{2789}{360}$ di libbra; perciò avremo il prezzo richiesto espresso da duc. 6,54 $\times \frac{2789}{360} = \frac{17989,03}{360} = 49,969$.

180. Finalmente consideriamo la moltiplicazione di due numeri complessi, nessuno dei quali sia ordinato nel sistema decimale. Un esempio di questa operazione ce l'offre la misura di una superficie col nostro antico sistema lineare; e fingiamo che si dovesse valutare la superficie di un rettangolo che abbia 3 canne, 5 palmi e 7 once di base, e 2 canne 6 palmi e 4 once di altezza. Dovendo per un teorema di Geometria la superficie del rettan-

golo essere espressa dal prodotto della base per l'altezza, noi cercheremo l'espressione di questo prodotto col metodo di prendere in parti, come chiaramente si osserva nel quadro seguente:

3 canne , 3 palmi , 7 once
2 canne , 6 palmi , 4 once

Can. quad.	Pal. quad.	Onc. quad.
6 ..		
1 ..		
	10 ..	
	8 ..	
	1 ..	48 ..
2 ..	16 ..	
	30 ..	
	3 ..	
		72 ..
	8 ..	
	1 ..	96 ..
		28 ..
Som. 10	20	100

..... prodotto di 3 canne
 di 4 palmi
 di 1 palmo per 3 canne
 di 6 once
 di 1 oncia
 prodotto di 3 canne
 di 5 palmi per 6 palmi
 di 6 once
 di 1 oncia
 prodotto di 3 canne
 di 5 palmi per 4 once
 di 3 palmi
 di 7 once

Volendo poi risolvere lo stesso problema per mezzo delle frazioni, si procederà nel seguente modo. Dopo aver trovato, come nel problema precedente, il numero 355 delle once equivalenti a 3 canne, 5 palmi e 7 once, e l'altro numero 268 di once equivalenti a 2 canne, 6 palmi e 4 once; si moltiplicheranno l'un per l'altro i due numeri 355 e 268. Il loro prodotto 95140 esprimerà il numero delle once quadrate contenute nel dato rettangolo; e poichè un palmo quadrato si compone di 144 once quadrate, così dividendo 95140 per 144, il quoziente 655 esprimerà palmi quadrati, ed il residuo 100 è un numero di once che forma una frazione di palmo quadrato. Ed osservando ancora che $6\frac{1}{4}$ palmi quadrati formano una canna quadrata, il quoziente 10 di 655 per $6\frac{1}{4}$ disegnerà canne quadrate, ed il residuo 20, ch'esprime palmi quadrati, n'è una frazione. Così troviamo, non altrimenti che col primo metodo, esser la superficie del dato rettangolo equivalente in unità quadrate a 10 canne, 20 palmi e 100 once ².

² Da questo esempio può rilevarsi di quanto la canna di 10 palmi e la sud-

181. *Divisione.* Quando il divisore è un numero intero, questa operazione non presenta veruna difficoltà. Poniamo per esempio che si voglia la 5^a parte di

Lib.	On.	Dr.	Tra.	Gra.	
8	7	6	2	18	
	43	36	5	3,0	

$$\overline{) \begin{array}{c} 3 \\ 1^{\text{lb.}} \ 8^{\text{on.}} \ 7^{\text{dr.}} \ 1^{\text{tr.}} \ 3^{\text{gr.}} \ 6 \end{array}}$$

Incominciando dal dividere le 8 libbre per 5, abbiamo il quoziente 1^{lib.} col residuo 3. Il quale ridotto in once ne darà 36, ed a queste aggiungendo le 7 once del dividendo, se ne hanno 43, la cui 5^a parte 8^{on.} scriveremo nel quoziente. Il residuo 3^{on.} lo ridurremo similmente in 30 dramme le quali coll'aggiunta delle 6 dramme date formano la somma 36, la cui 5^a parte è 7^{dr.}. Abbiamo da questa divisione il residuo 1^{dr.} = 3^{tr.}, più i 2^{tr.} dati ne avremo 5 che divisi per 5 danno l'esatto quoziente 1. Finalmente prendendo la 5^a parte di 18^{gr.} abbiamo il quoziente 3^{gr.}, 3. Così abbiamo la 5^a parte del numero proposto espressa da 1^{lib.} 8^{on.} 7^{dr.} 1^{tr.} 3^{gr.}, 5.

182. Se poi il divisore fosse un numero complesso della medesima specie del dividendo, allora la divisione riducendosi a determinare il rapporto di due grandezze omogenee, il quoziente sarà indipendente dal valore dell'unità comune ai due termini della divisione. Basterà dunque ridurli all'unità minima ch'essi contengono, e poi si potrà eseguire la divisione come fossero due numeri interi. Poniamo per esempio che si abbia da dividere 13can. 6palm. 9on. per 2can. 7pal. 5on. 2mi. Poichè l'unità minima, di cui si faccia menzione nei due numeri è il minuto, ridurremo

divisione del palmo in parti decimali avesse agevolato i calcoli delle misure. Egli è vero che i nostri antichi architetti adoperavano la *pertica* di 10 palmi, ma conservavano la divisione del palmo in once e minuti. Dietro proposta fatta dal Commendatore Afan de Rivera, quando veniva chiamato a Direttore dei Ponti e Strade, Acque e Foreste, non solo fu ripristinata la pertica di 10 palmi, ma venne ancora introdotta la suddivisione decimale del palmo; ciò che rese assai spediti i calcoli di quella vasta amministrazione. Dopo il quale felice sperimento, il De Rivera giustamente sosteneva il sistema decimale delle nostre misure lineari, quando il progetto del Generale Visconti fissava l'attenzione del nostro Governo.

col noto metodo i due numeri in minuti, ed avremo il dividendo espresso da 6645 minuti ed il divisore da 1407: fatta la divisione di questi due numeri troveremo il quoziente 4,7228.... che esprimerà il rapporto delle due lunghezze.

183. Supponiamo ancora il divisore complesso, ma eterogeneo col dividendo. Un'esempio di quest'operazione ci viene offerta dalla soluzione del seguente problema: *7 canne 5 palmi e 3 once di panno sono state comperate per ducati 56; si vuol sapere a quanto la canna sia venuta questa compera* — Se il prezzo di una canna fosse noto, il prodotto di questo prezzo per 7 canne, 5 palmi e 3 once dovrebbe risultare di duc. 56. Questo numero deve dunque riguardarsi come prodotto di una moltiplicazione, di cui il numero delle canne palmi ed once essendo uno dei fattori, l'altro sarà il prezzo di una canna, e che determineremo dividendo il prezzo totale per la quantità della merce. Or per dividere 56 per 7 canne, 5 palmi e 3 once, bisogna ridurre questo numero in una espressione frazionaria di canna; ciò che si ottiene moltiplicando le 7 canne per 8 ed al prodotto aggiungendo 5; moltiplicando poi questa somma per 12, ed al prodotto aggiunto il 3, avremo 735 che sarà il numero delle once equivalenti alle canne, palmi ed once date. E poichè l'oncia è 96^a parte della canna, l'espressione frazionaria richiesta sarà $\frac{735}{96}$; quindi il prezzo di una canna sarà dato dalla divisione di 56 per $\frac{735}{96}$, la quale ci darà

$$56 : \frac{735}{96} = \frac{56.96}{735} = \frac{5376}{735} = 7,314.$$

Lo stesso valore di duc. 7, e grana 31 e mezzo si sarebbe ottenuto determinando prima il prezzo di un'oncia e poi moltiplicandolo per 96. Questo prodotto però, quando la divisione da cui risulta il prezzo di un'oncia non desse un quoziente esatto, avrebbe per la regola del n° 151 due cifre dubbie alla destra; quindi per avere il prezzo della canna fino alla 3^a decimale, è d'uopo che il prezzo dell'oncia sia approssimato fino alla 5^a decimale. Così dividendo il prezzo totale ch'è 56 per 735 ch'è il numero delle on-

ce, si avrà fino alla 3^a decimale il quoziente 0,076, il quale moltiplicato per 96 darebbe per prezzo di una canna duc. 7,296 minore del vero di 0,018. Ma se il prezzo dell'oncia venisse approssimato alla 5^a cifra decimale, si avrebbe allora il suo valore espresso da 0,07619 che moltiplicato per 96, e trascurate le due ultime cifre del prodotto, riproduce il numero 7,314 pel prezzo di una canna.

Collo stesso metodo si risolverebbe ancora il seguente problema: *la superficie di un rettangolo è data equivalente a 27 canne quadrate, 49 palmi quadrati e 93 once quadrate; si conosce ancora che la sua base è di 3 canne, 5 palmi e 7 once, e si vuol sapere di quante canne, palmi ed once sia la sua altezza* — Facendo la divisione del primo numero pel secondo si troveranno per valore dell'altezza, 7 canne, 4 palmi ed 1 oncia.

184. *Riduzione dei complessi a decimali e viceversa* — È sovente utile di saper tradurre un dato numero complesso in frazione decimale dell'unità immediatamente superiore, e viceversa data una certa frazione di unità saperne trovare l'espressione equivalente in summultipli di essa. Supponiamo per esempio che si voglia tradurre in frazione decimale di giorno il tempo di 13°, 31', 43". Cominciando dal determinare il numero di minuti secondi equivalenti a questo tempo dato, noi moltiplicheremo 13 per 60, ed al prodotto 780 aggiungendo 31, avremo la somma di 811' equivalente a 13° e 31': similmente moltiplicando 811 per 60 ed al prodotto 48660 aggiungendo 43, avremo 48703" equivalenti a 13°, 31', 43". Or il minuto secondo essendo 60^a parte del minuto primo, il quale è poi 60^a parte dell'ora, e questa una 24^a parte del giorno; sarà il minuto secondo una parte del giorno rappresentata da $60.60.24 = 86400$. Quindi 48703" saranno equivalenti a $\frac{48703}{86400}$ di giorno, frazione che ridotta in decimale ci dà

$$13^{\circ}, 31', 43'' = 0,56367.$$

Viceversa: cerchiamo determinare la quantità di once, dramme, trappesi e granelli equivalenti a $\frac{3827}{5464}$ di libbra. Perchè questo

numero in vece di essere riferito alla libbra come unità, lo sia all'oncia ch'è 12^a parte della libbra, è d'uopo moltiplicarlo per 12; ed avremo così

$$\text{lib. } \frac{3827}{3464} = \text{onc. } \frac{3827.12}{3464} = 8^{\text{on.}} + \frac{2212}{3464}.$$

Similmente dalla frazione di oncia $\frac{2212}{3464} = \frac{553}{1366}$ ne avremo le dramme moltiplicandola per 10, e sarà così

$$\text{onc. } \frac{553}{1366} = \text{dram. } \frac{5530}{1366} = 4^{\text{dr.}} + \frac{66}{1366}.$$

E moltiplicando per 3 la frazione di dramma $\frac{33}{683} = \frac{66}{1366}$, il prodotto $\frac{99}{683}$, ch'è tuttavia una frazione vera, dimostra che non vi si contiene verun trappeso — In fine moltiplicheremo per 20 la frazione di trappeso $\frac{99}{683}$, ed avremo

$$\text{trap. } \frac{99}{683} = \text{gran. } \frac{1980}{683} = 3^{\text{gr.}} \text{ circa.}$$

Dunque

$$\text{libb. } \frac{3827}{3464} = 8 \text{ oncc, } 4 \text{ dramme e } 3 \text{ granelli circa.}$$

Se la frazione data fosse decimale, il metodo di calcolo sarebbe lo stesso; soltanto sarebbe risparmiata la divisione per la determinazione dei summultipli. Poniamo per esempio che si volessero determinare le ore, i minuti primi ed i secondi contenuti nella frazione di giorno 0^e,47856. Moltiplicando successivamente questo numero per 24, per 60 e poi un'altra volta per 60, le cifre che nei prodotti consecutivi otterremo alla sinistra della virgola, rappresenteranno le ore, i minuti primi ed i secondi contenuti nella frazione data; e così otterremo

$$0^{\text{e}},47856 = 11^{\circ} 29' 7'',581.$$

185. *Riduzione delle antiche misure alle nuove* — Supponiamo in primo luogo che si voglia determinare a quante canne e frazione di essa secondo il nuovo sistema equivalgano 13 canne 7 palmi e 5 onces dell'antico. Traducendo questo numero in palmi e frazione di esso, avremo

$$13 \text{ canne} + 7 \text{ palmi} + 5 \text{ onces} = 111^p + \frac{5}{12} = 111^p, 417.$$

E poichè il palmo nuovo è lo stesso che l'antico, divideremo i 111 palmi per 10, ed il quoziente esprimerà le nuove canne. In tal modo otterremo

$$\text{canne antiche } 13, 7 \text{ palmi e } 5 \text{ onces} = \text{canne nuove } 11, 417.$$

— 2° Sia da ridursi in canne quadrate del nuovo sistema il numero di 15 canne quadrate, 58 palmi e 98 onces dell'antico. Riducendo questo numero a palmi quadrati e frazione di esso, avremo

$$15^{c.q.} + 58^{p.q.} + 98^{o.q.} = 1018^{p.q.} + \frac{98}{144} = 1018^{p.q.}, 68.$$

Or la canna quadrata si compone di 100 palmi quadrati; saranno dunque $1018^{p.q.}, 68 = 10^{c.q.} 1868$; vale a dire che si avranno

$$15^{c.q.} + 58^{p.q.} + 98^{o.q.} \text{ antiche} = 10^{c.q.}, 1868 \text{ nuove.}$$

— 3° Sia da determinarsi a quante moggia nuove equivalgano 8 moggia, 7 quarte, 6 none e 2 quinte secondo l'antico sistema della Città di Napoli. Essendosi detto nel n° 171 che l'antico moggio di Napoli si componeva di 900 passi quadrati agrari, e che si divideva in 10 quarte, ogni quarta in 9 none, ogni nona in 5 quinte, ciascuna delle quali valeva due passi quadrati; è chiaro che traducendo l'estensione data in palmi quadrati, avremo

$$\text{le 8 moggia} = 7200 \text{ passi qua.} = \text{pal. qua. } 7200 \left(7 + \frac{1}{3}\right)^2 = 387200$$

$$\text{le 7 quarte} = 630 \text{ passi qua.} = \text{pal. qua. } 630 \left(7 + \frac{1}{3}\right)^2 = 33880$$

$$\text{le 6 none} = 60 \text{ passi qua.} = \text{pal. qua. } 60 \left(7 + \frac{1}{3}\right)^2 = 3226,7$$

$$\text{le 2 quinte} = 4 \text{ passi qua.} = \text{pal. qua. } 4 \left(7 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{215,1}{424521,8}$$

Avremo dunque in tutto 424521,8 palmi quadrati. E poichè il nuovo moggio si compone di 10000 palmi quadrati, la somma ottenuta sarà equivalente a moggia nuove 42,45218, ch'è appunto il numero richiesto.

SEZIONE SECONDA.

Soluzione di problemi.

CAPO PRIMO.

Principi fondamentali.

186. Tre metodi generali si hanno per risolvere un problema numerico; la *regola del tre*, il metodo delle *equazioni*, e la *regola di falsa posizione*. La prima non è che un caso particolare del metodo delle equazioni, poichè derivando dal teorema che in ogni proporzione il prodotto dei termini estremi dev'essere eguale a quello dei medi, essa non fa che risolvere un'equazione della forma

$$a.x = b.c,$$

donde

$$x = \frac{b.c}{a},$$

il quale risultamento costituisce la *regola del tre*.

Qui appresso vedremo quale dipendenza dal metodo delle equazioni abbia la regola di falsa posizione. Intanto, siccome nella sezione quarta del libro precedente abbiamo esposto i principali teoremi sulle proporzioni, dai quali dipendono i metodi per applicarle alle diverse quistioni che ne sono suscettibili; così dovremo ora esporre i principi fondamentali delle equazioni, principi che se non volessimo qui formulare, dovremmo purtuttavia in seguito supporli, poichè sono di loro natura implicitamente ammessi in ogni modo di soluzione dei problemi.

187. L'arte di risolvere un problema per mezzo di equazione, è quella di trovare due espressioni equivalenti, che siano composte delle quantità date nel problema e di quelle che si cercano. Poniamo per esempio che si volesse conoscere il numero, la cui metà, 3^a e 5^a parte unite insieme facessero una somma eguale a

quella del numero richiesto più 40. Chiamando x il numero cercato, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{5}$ n'esprimeranno la metà, la 3^a e la 5^a parte; e poichè per la condizione del problema la somma di queste tre frazioni deve pareggiare quella di x con 40, avremo

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = x + 40.$$

Ecco un'equazione; vale a dire un'eguaglianza di due espressioni composte del numero incognito x e dei numeri dati 2, 3, 5 e 40.

Alle due espressioni separate dal segno $=$ si dà il nome di *membri dell'equazione*; ed in ispecie si denomina *primo membro* l'espressione situata a sinistra del segno $=$, e *secondo membro* l'altra.

188. Ciò posto, siano date le quattro equazioni

$$a + b = c \dots\dots (1)$$

$$b - c = d \dots\dots (2)$$

$$ma = p \dots\dots (3)$$

$$\frac{a}{n} = q \dots\dots (4)$$

Se dalle due quantità eguali, che costituiscono l'equazione (1), togliamo il numero b , i due residui dovranno essere necessariamente eguali, ed avremo

$$a = c - b \dots\dots (5)$$

Similmente aggiungiamo la quantità c ai due membri dell'equazione (2), ed avremo le due somme eguali

$$b - c + c = d + c,$$

ossia $b = d + c \dots\dots (6)$

In queste modificazioni apportate alle equazioni (1) e (2) non abbiamo fatto altro che trasportare un *termine* (si dà questo nome ad ogni espressione di numero, preceduta dal segno $+$ o $-$) da un membro dell'equazione nell'altro. Ed osserviamo che il termine b , il quale ha il segno $+$ nel 1° membro dell'equazione (1), è passato nel 2° membro dell'equazione (5) prendendo il segno $-$; e viceversa il termine c , ch'è preceduto dal segno $-$ nel 1° membro dell'equazione (2), ha tolto il segno $+$ passando nel 2° membro dell'equazione (6). Donde la regola generale:

I. *Un termine muterà il suo segno, passando da un membro dell'equazione nell'altro.*

Dividendo per m i due membri dell'equazione (3), si ottiene

$$a = \frac{p}{m}.$$

Dunque

II. *Un numero che sia fattore di un membro dell'equazione, passando nell'altro ne sarà divisore.*

In fine moltiplichiamo per n i due membri dell'equazione (4), ed avremo
quindi

$$a = q.n;$$

III. *Il divisore di un membro di equazione, passando nell'altro membro ne diverrà fattore.*

Questi tre semplicissimi principi, che presiedono alla teorica delle equazioni, ci saranno di grande aiuto nel risolvere i problemi, che formano l'obbietto di questa sezione.

189. Vi ha purtuttavia dei problemi che riescono intrattabili col metodo delle equazioni. Poniamo per esempio che si volesse innalzare il numero 3 ad una certa potenza x tale, che aggiungendo a 3^x il doppio di x , si avesse la somma 8. Avremmo allora l'equazione

$$3^x + 2x = 8.$$

Se non esistesse il termine $2x$, potremmo determinare x per mezzo di logaritmi, avendo

$$x \cdot \log. 3 = \log. 8,$$

donde

$$x = \frac{\log. 8}{\log. 3}.$$

Ma l'esistenza del termine $2x$ rende inapplicabile questo metodo.

L'equazione proposta va tra quelle che si dicono *trascendenti*, perchè sono inaccessibili ai metodi che l'algebra insegna per dedurre da un'equazione il valore dell'incognita che essa contiene; ed è specialmente per le equazioni di simil natura che diviene utile la *regola di falsa posizione*.

Per ben comprendere lo spirito di questa regola proponiamoci in primo luogo la seguente semplicissima quistione: si cerca un numero tale che moltiplicato per 3 dia il prodotto 51. Chiamando x questo numero, avremo

$$3x = 51.$$

E se in vece di x ponessimo 20, avremmo

$$3.20 = 60;$$

risultamento che essendo diverso da 51, ci dimostra che porre $x = 20$ è lo stesso che stabilire una *falsa posizione*. Ma dividendo l'una per l'altra queste due equazioni abbiamo

$$\frac{x}{20} = \frac{51}{60},$$

vale a dire

$$x : 20 = 51 : 60;$$

quindi: il numero richiesto sarà al numero supposto, come il risultamento che si deve ottenere a quello che si è ottenuto.

Questa è la regola di *falsa posizione semplice*, perchè determina il valore dell'incognita per mezzo di una sola posizione. Appliciamola alla risoluzione del seguente problema.

Si cerca un numero, di cui $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{5}$ uniti insieme facciano 31. Poniamo che il numero richiesto sia 20: avremo $\frac{20}{2} = 10$, $\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$, $\frac{20}{5} = 4$. Questi tre numeri danno la somma $20\frac{2}{3}$; quindi per la regola data avremo

$$x : 20 = 31 : 20\frac{2}{3},$$

la quale proporzione ci dà $x = 30$, numero che soddisfa alle condizioni del problema.

190. Proponiamoci ancora quest'altra quistione: un padre ha 40 anni, suo figlio ne ha 10; e si vuol sapere quanti anni dovranno decorrere, perchè l'età del padre sia tripla di quella del figlio — Supponiamo che fossero 8 gli anni richiesti; il padre a-

vrebbe allora 48 anni, ed il figlio ne avrebbe 18; ma 48 non essendo triplo di 18, il numero richiesto dovrà esser diverso da 8. Or è facile comprendere come la regola esposta non sia applicabile a questo problema, poichè essa suppone dato un numero come condizione alla quale dovrà soddisfare il valore dell'incognita; e nel quesito proposto in vece di numero definito abbiamo un semplice rapporto che può esser soddisfatto da un'infinità di numeri, tra i quali poi converrebbe scegliere quelli che si componessero dei numeri dati. Per risolvere questo problema bisogna la *regola di falsa posizione doppia*.

Abbiamo veduto nel n° precedente come la regola di falsa posizione semplice prendesse origine da un'equazione della forma

$$ax = b.$$

La regola di falsa posizione doppia deriva in vece dall'equazione più generale

$$ax + b = cx + d,$$

ossia $ax + b - (cx + d) = 0 \dots (1)$

In questa sostituiamo ad x un numero arbitrario n , il quale se non è il valore di x ci darà

$$an + b - (cn + d) = e \dots (2)$$

in vece di zero; e perciò e disegnerà l'errore derivato dalla falsa posizione n . Poniamo similmente un altro numero n' , ed avremo un altro errore e' dalla sottrazione

$$an' + b - (cn' + d) = e' \dots (3)$$

Da ciascuna delle equazioni (2) e (3) sottraendo l'equazione (1), avremo i due residui

$$\begin{aligned} (a + c)(n - x) &= e \\ (a + c)(n' - x) &= e', \end{aligned}$$

i quali residui divisi l'un per l'altro, ci danno

$$\frac{n - x}{n' - x} = \frac{e}{e'},$$

donde

$$x = \frac{ne' - n'e}{e' - e}.$$

Se l'errore e fosse risultato negativo, si avrebbe $x = \frac{ne' + n'e}{e' + e}$; e se fosse negativo e' , avremmo $x = \frac{-(ne' + n'e)}{-(e' + e)}$. Da tutto ciò risulta la seguente regola per la falsa posizione doppia.

Per ottenere il valore dell'incognita, bisogna moltiplicare la 1^a posizione pel 2° errore, e viceversa la 2^a posizione pel 1° errore; indi dividere la differenza o la somma dei due prodotti per la differenza o la somma dei due errori, secondochè questi avranno lo stesso segno o segni differenti.

Torniamo ora al problema del padre e del figlio. Colla posizione 8 abbiamo avuto 48 per l'età del padre e 18 per quella del figlio; ma perchè fosse risoluto il problema, l'età del padre avrebbe dovuto risultare 54, perchè fosse tripla di quella del figlio: vi è dunque un errore di -6 . Facendo una 2^a posizione di $x=2$, avremo pel padre 42 anni e 12 pel figlio; quindi un errore di $+6$, poichè di tanto 42 supera 36 ch'è il triplo di 12. Avremo così

<table border="0"> <tr> <td>1^a posizione</td> <td>1° errore</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">8</td> <td style="text-align: center;">- 6</td> </tr> <tr> <td>2^a posizione</td> <td>2° errore</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">6</td> </tr> </table>	1 ^a posizione	1° errore	8	- 6	2 ^a posizione	2° errore	2	6	quindi	$x = \frac{8.6 + 6.2}{6 + 6} = 5.$
1 ^a posizione	1° errore									
8	- 6									
2 ^a posizione	2° errore									
2	6									

Ed in vero con $x=5$, abbiamo 45 anni pel padre e 15 pel figlio, e 45 è triplo di 15.

Applichiamo questa medesima regola ad un problema più complicato — *Un padre di famiglia dispone nel suo testamento che l'asse ereditario sia diviso tra i suoi figli nel seguente modo: il primogenito prenderà 1000 ducati, più $\frac{1}{6}$ del residuo; tolta questa prima parte, il secondogenito prenderà 2000 ducati più $\frac{1}{6}$ del residuo; tolta ancora la porzione del secondo, il terzogenito prenderà 3000 ducati più $\frac{1}{6}$ del residuo; e similmente gli altri figli preleveranno sui residui successivi delle somme crescenti sempre di 1000 ducati e vi aggiungeranno $\frac{1}{6}$ di ciò che resta. Fatta la divisione, tutte le porzioni si trovano eguali; e dietro questo dato si vuol conoscere il valore dell'asse ereditario, il numero dei figli e la parte di ciascuno.*

Se l'asse ereditario fosse stato di 22000 ducati, il primogenito avrebbe avuto

$$1000 + \frac{21000}{6} = 4500.$$

Togliendo dall'asse ereditario questa somma più i 2000 ducati che dovrà prelevare il secondogenito, si avrà il residuo 13500; quindi il secondogenito avrebbe

$$2000 + \frac{13500}{6} = 4583 \frac{1}{3}.$$

Le due parti avrebbero dovuto risultare eguali, ed in vece troviamo che la parte del 2° supera quella del 1° di $83 \frac{1}{3}$. Ecco l'errore nascente dalla posizione 22000.

Poniamo in vece che l'eredità fosse di 19000 ducati. In questa ipotesi il primo dei figli avrebbe

$$1000 + \frac{18000}{6} = 4000;$$

i quali tolti insieme ai 2000 del secondo dai 19000, se ne ottiene il residuo 13000; quindi il secondo dei figli avrebbe

$$2000 + \frac{13000}{6} = 4166 \frac{2}{3}.$$

Abbiamo così un 2° errore di $166 \frac{2}{3}$ nello stesso senso del primo. Quindi abbiamo

1 ^a posizione	1° errore
22000	$83 \frac{1}{3}$
2 ^a posizione	2° errore
19000	$166 \frac{2}{3}$

Quindi per la regola data avremo l'eredità

$$x = \frac{22000 \times 166 \frac{2}{3} - 19000 \times 83 \frac{1}{3}}{166 \frac{2}{3} - 83 \frac{1}{3}} = 25000.$$

Così la parte del primogenito sarà

$$1000 + \frac{24000}{6} = 5000,$$

e quella del secondo sarà

$$2000 + \frac{18000}{6} = 5000.$$

Dunque la parte di ciascuno sarà 5000, ed i figli saranno 5, come si trova rifermato nel calcolo seguente.

$$1^{\circ} \dots 1000 + \frac{24000}{6} = 5000$$

$$2^{\circ} \dots 2000 + \frac{18000}{6} = 5000$$

$$3^{\circ} \dots 3000 + \frac{12000}{6} = 5000$$

$$4^{\circ} \dots 4000 + \frac{6000}{6} = 5000$$

$$5^{\circ} \dots 5000 + \frac{0}{6} = 5000$$

191. Giacchè la regola di falsa posizione risolve così facilmente dei problemi alquanto difficili, è natural cosa che si dimandi: può questa regola risolvere qualsivoglia problema numerico? — Per rispondere adeguatamente riprendiamo l'equazione

$$ax + b = cx + d,$$

dove la regola è derivata; e cerchiamo la relazione che le false posizioni potranno avere cogli errori risultanti. A tal uopo facciamo passare cx nel 1° membro e b nel secondo; avremo

$$(a - c)x = d - b,$$

ossia

$$px = q,$$

facendo per maggior semplicità $a - c = p$ e $d - b = q$.

Chiamiamo m il vero valore di x , e fingiamo che noi lo cercassimo per mezzo delle false posizioni $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, ec. ordinate in progressione aritmetica; è chiaro che gli errori sarebbero p , $2p$, $3p$, ec. e che farebbero anch'essi una progressione aritmetica. Dunque perchè la regola di falsa posizione sia applicabile, è necessario che l'incognita dipenda in modo dalle quantità note che le false posizioni variando in progressione aritmetica, gli errori variassero ancora secondo analoga progressione.

Ciò posto, fingiamo che si voglia determinare un numero il cui quadrato moltiplicato per a dia il prodotto b . Chiamando x il numero incognito, avremo

$$ax^2 = b.$$

Or se cerchiamo il valore di x , che supponiamo eguale ad m , per mezzo delle false posizioni $m+1$, $m+2$, $m+3$, ec. ordinate in progressione aritmetica; gli errori, che per la legge di composizione del quadrato saranno $2m+1$, $4m+4$, $6m+9$, ec. non formeranno progressione aritmetica, e la regola si troverà in difetto. Poniamo per esempio che nell'equazione data fosse $a=2$, $b=50$; sarà facile trovare $x=5$: ed intanto cercando il valore di x colle posizioni $x=6$ ed $x=7$, la regola darà $x=5,15$, valore approssimato al vero, ma non esatto — Dunque in generale la regola di falsa posizione non può risolvere esattamente che i problemi di *primo grado*, vale a dire quelli in cui l'incognita ha l'esponente 1.

192. Ma se la regola di falsa posizione non risolve esattamente che i problemi di primo grado (sotto il quale aspetto essa sarebbe perfettamente inutile nello stato attuale delle cognizioni aritmetiche), ha purtuttavia il vantaggio di offrire un metodo semplicissimo per approssimare indefinitamente al valore dell'incognita in certe equazioni inaccessibili ai metodi algebrici. A fine di presentarne un esempio, riprendiamo l'equazione trascendente

$$3^x + 2x = 8.$$

Se in questa poniamo $x=1$, avremo $3^x + 2x = 5$; e ponendovi in vece $x=2$, risulterà $3^x + 2x = 13$. Dunque x dovrà trovarsi tra 1 e 2; e perciò lo supporremo eguale a 1,5. Con questa posizione (calcolando sempre il valore di 3^x per mezzo di logaritmi), ne risulterà

$$3^x + 2x = 8,19624.$$

Bisogna dunque diminuire il valore di x , che in conseguenza faremo $= 1,4$. Così avremo

$$3^x + 2x = 7,45554.$$

Ecco due posizioni $x=1,5$ ed $x=1,4$ cogli errori corrispondenti 0,19624 e $-0,54446$. Applicandovi la regola di falsa posizione, troveremo $x=1,475$; donde

$$3^x + 2x = 7,98338,$$

valore che più de' precedenti si approssima al vero. Torniamo ad applicare la regola colle due posizioni $x=1,5$ ed $x=1,475$ cogli errori corrispondenti $0,19624$ e $-0,01462$; avremo $x=1,4767$,

$$3x + 2x = 8,01823.$$

Mettendo ancora a calcolo le due posizioni $x=1,475$ ed $x=1,4767$ cogli errori corrispondenti, la regola darà $x=1,4757$; quindi

$$3x + 2x = 8,0107.$$

E così continuando il calcolo, potremo approssimare al valore di x fino a ottenere un numero che differisca da 8 per una quantità minore di un limite dato.

CAPO SECONDO.

Regola del tre, e calcolo dell'interesse semplice.

193. Quando tra i dati di un problema ed il numero che si cerca lo spirito vede una relazione di proporzione, la determinazione dell'incognita sarà la stessa che quella di un quarto proporzionale; ed in questo caso il metodo generale di soluzione prende il nome di *Regola del tre*, perchè da tre termini dati di una proporzione ne deduce il quarto. Prendiamo ad esempio il seguente problema:

Con 40 operai si sono costruite 50 canne di strada: si vuol sapere quanti operai bisogneranno, perchè in un tempo eguale al primo se ne costruiscano 75 canne.

Supponendo, come richiede la quistione, che ciascun operaio contribuisca egualmente alla produzione dell'opera, la quantità del lavoro sarà il prodotto di ciò che esegue un operaio, moltiplicato pel numero di essi. Quindi, date tutte le altre cose eguali, la quantità del lavoro sarà doppia, tripla, ec., quando sia doppio, triplo ec. il numero degli operai. La quistione proposta appartiene dunque alla regola del tre, poichè vediamo che tra le quantità di lavoro esiste la stessa ragione che ha luogo tra i numeri

di operai; e perciò chiamando x il numero richiesto, avremo

$$x : 40 = 75 : 50,$$

donde
$$x = \frac{75 \cdot 40}{50} = 60.;$$

vale a dire che bisognano 60 operai per eseguire 75 unità di quel lavoro, di cui 50 unità hanno richiesto 40 operai.

194. In questo problema abbiamo trovato che la ragione dei due numeri di operai doveva variare nello stesso senso a quella esistente tra le quantità di lavoro; ed in casi simili la regola del tre prende l'aggiunta di *diretta*. Ma se la ragione del numero incognito al suo omologo variesse inversamente a quella degli altri due numeri dati, vale a dire che facendo doppia, tripla, ecc. la prima ragione, la seconda divenisse metà, terza parte ec. allora la regola del tre prenderebbe l'aggiunto d'*inversa*. Poniamo per esempio il seguente problema:

Una nave ha viveri per soli 12 giorni; e poichè deve rimanere in alto mare per altri 20 giorni, si vuol sapere in qual ragione si dovrà ridurre il consumo giornaliero.

Poichè il consumo giornaliero possibile dev'esser rappresentato dal quoziente della provigione pel numero dei giorni per cui deve bastare, è chiaro che la quantità di questo consumo dovrà diminuire come il numero dei giorni diverrà più grande. Perciò chiamando 1 il consumo ordinario ed x quello che dovrà aver luogo, perchè la provigione basti 20 giorni, avremo che x starà ad 1, non come 20 a 12; ma all'opposto come 12 a 20. Dalla quale proporzione avendo $x = \frac{3}{8}$, si trova che il consumo giornaliero dovrà ridursi ai $\frac{3}{8}$ dell'ordinario.

195. Vi sono dei problemi in cui l'incognita dipende dalle quantità note per mezzo non di una ma di più proporzioni. Questi problemi si risolvono ancora per mezzo della regola del tre, la quale allora si distingue coll'aggiunto di *composta* dalle forme precedenti che si dicono *semplici*. Prendiamo ad esempio il seguente problema.

10 operai, lavorando 8 ore al giorno, hanno cavato in 12 giorni sopra un terreno resistente come 2 un fosso lungo 100 palmi, largo 6 e profondo 5; si vuol sapere in quanti giorni sopra un terreno resistente come 3 sarebbe cavato un fosso lungo 120 palmi, largo 5 e profondo 4 da 8 operai che lavorassero per 10 ore al giorno.

Per agevolare la ricerca dei rapporti di cui si dovranno comporre le diverse proporzioni che dovranno rappresentare la dipendenza dell'incognita dai dati, ordiniamo le condizioni del problema nel seguente modo.

Oper.	Lung.	Larg.	Prof.	Resist. del ter.	Ore di lav.	Gior.
10	100	6	5	2	8	12
8	120	5	4	3	10	x .

Se tutte le condizioni del lavoro fossero le stesse pei primi e secondi operai, i numeri dei giorni dovrebbero essere inversamente proporzionali a quelli degli operai, poichè siccome varia il numero di questi, nello stesso senso dovrà variare la quantità del lavoro giornaliero il quale poi a misura; che aumenta o diminuisce, farà sì che la quantità di giorni necessari al compimento del lavoro divenga viceversa minore o maggiore. In tale ipotesi chiamando y il numero dei giorni, avremo la proporzione

$$y : 12 = 10 : 8.$$

Or considerando che i secondi operai debbono eseguire un lavoro più lungo, è chiaro che il numero dei giorni dovrà esser più grande di quello che verrebbe dato da y per mezzo della proporzione precedente. E chiamando y' il valore di y aumentato nella ragione delle lunghezze 120 e 100, si ottiene l'altra proporzione

$$y' : y = 120 : 100.$$

Ma la larghezza del fosso, che finora abbiamo supposta la stessa per le due compagnie di operai, è in vece rispetto alla seconda minore di quella relativa alla prima nella ragione di 5 e 6: nella stessa ragione dovrà diminuire y' , e chiamando y'' il suo valore così diminuito, avremo

$$y'' : y' = 5 : 6.$$

E similmente considerando la diversa profondità dei due fossi, avremo

$$y'' : y' = 4 : 5.$$

È varia ancora la resistenza del terreno, la quale aumentando fa diminuire la quantità del lavoro giornaliero, e quindi aumenta il numero dei giorni; perciò sarà

$$y''' : y'' = 3 : 2.$$

Finalmente, i secondi operai lavorando più ore al giorno che i primi, il numero dei giorni risulterà minore di y'' ; e poichè questa è l'ultima condizione del problema, così chiameremo x (come nell'enunciato) il valore di y''' modificato nella ragione di 8 a 10; ed avremo

$$x : y''' = 8 : 10.$$

Situando l'una sotto dell'altra, come qui appresso, tutte le proporzioni ottenute

$$\begin{array}{l} y : 12 = 10 : 8 \\ y' : y = 120 : 100 \\ y'' : y' = 5 : 6 \\ y''' : y'' = 4 : 3 \\ y^{iv} : y''' = 3 : 2 \\ x : y^{iv} = 8 : 10, \end{array}$$

avremo, moltiplicandone i termini corrispondenti, e sopprimendo le y comuni all'antecedente ed al conseguente dei prodotti,

$$x : 12 = 10 \times 120 \times 5 \times 4 \times 3 \times 8 : 8 \times 100 \times 6 \times 5 \times 2 \times 10.$$

Della quale proporzione facendo i prodotti dei termini estremi e dei medi, si ottiene

$$12 \times 10 \times 120 \times 5 \times 4 \times 3 \times 8 = 8 \times 100 \times 6 \times 5 \times 2 \times 10 \times x.$$

$$\text{dove} \quad x = \frac{10.120.5.4.3.8.12}{8.100.6.5.2.10} = \frac{6.4.3}{5} = 14,4.$$

Or riprendiamo le due linee di dati del problema

Oper.	Lung.	Larg.	Prof.	Resist. del ter.	Ore di lav.	Gior.
10	100	6	5	2	8	12
8	120	5	4	3	10	x ,

e facciamo passare dalla prima linea alla seconda e viceversa tutti

i dati congeneri la cui ragione è diretta con quella dei giorni; avremo così le due linee

$$\begin{array}{cccccccc} 10 & , & 120 & , & 5 & , & 4 & , & 3 & , & 8 & , & 12 \\ 8 & , & 100 & ; & 6 & , & 5 & , & 2 & , & 10 & , & x \end{array}$$

indi moltiplichiamo i numeri contenuti in ciascuna linea, ed eguagliamone i prodotti; ne risulterà

$$10 \times 120 \times 5 \times 4 \times 3 \times 8 \times 12 = 8 \times 100 \times 6 \times 5 \times 2 \times 10 \times x;$$

vale a dire la stessa relazione, che abbiamo trovato per mezzo della moltiplicazione delle proporzioni. Donde poi deriva la seguente regola generale del tre composta:

Dopo aver ordinato tutte le quantità del problema in due linee, i cui termini saranno indicati dallo stesso enunciato, si facciano alternare di sito tutti quei termini la cui ragione è diretta con quella dell'incognita alla sua quantità omologa; indi si moltiplichino tra loro i termini di ciascuna linea, se ne eguagliano i prodotti, e si avrà un'equazione da cui sarà facile dedurre il valore dell'incognita.

196. Il calcolo dell'interesse semplice, ossia dell'interesse non produttivo di altro interesse, non è che un'applicazione della regola generale del tre composta.

Si dà il nome d'interesse al prezzo dell'uso di un capitale; e perchè questo prezzo fosse in una certa relazione col valore del capitale e colla durata dell'uso, bisognava definire un'unità di capitale ed un'altra di tempo. Si è tolta ad unità di capitale la somma di 100 unità di moneta; così essendo presso noi unità di moneta il ducato, la nostra unità di capitale si compone di 100 ducati. Unità di tempo è l'anno, quando non si convenisse di prendere il mese ad unità; e l'interesse corrispondente all'unità di capitale per l'unità di tempo, dicesi *ragione d'interesse*. *

* Se nei contratti di mutuo è utile stabilire un'unità di capitale, anziché un'unità di rendita, ciò deriva dall'essere l'uso del capitale la merce che forma la materia del contratto, e della quale non si può definire il prezzo senza rapportarla ad una certa unità di capitale. Al contrario, quando per sovvenire ai bisogni dello Stato il Governo costituisce un debito pubblico, e concede ai creditori il diritto di vendere la rendita che ad essi paga; allora è merce la rendita, sul cui prezzo non si potrebbe convenire senza fissare un'unità di rendita.

Ciò posto, supponiamo che si voglia calcolare l'interesse che daranno 2890 ducati per 21 mesi, impiegati alla ragione annua del 7 per 100. Per applicare facilmente a questo problema la regola suindicata, lo formoleremo nel seguente modo.

100 ducati in 12 mesi han dato 7 ducati di rendita; si vuol sapere la rendita x che avrebbero dato 2890 ducati in 21 mesi. Avremo così

Capitale	Tempo	Rendita
100	12	7
2890	21	x

Permutando i posti dei capitali e dei tempi perchè in ragion diretta collo rendite, avremo le due linee di fattori

$$\begin{array}{ccc} 2890, & 21, & 7 \\ 100, & 12, & x; \end{array}$$

ai quali applicando la regola di sopra esposta, abbiamo

$$2890.21.7 = 100.12.x,$$

donde
$$x = \frac{2890.21.7}{100.12} = 355,02.$$

Or la espressione frazionaria, da cui risulta il valore di x può presentarsi sotto la forma

$$\frac{2890.7}{100} \cdot \frac{21}{12},$$

nella quale osserviamo che 2890 essendo il capitale, potremo indicarlo in generale colla lettera c ; 7, ch'è la ragione d'interesse, colla lettera i , e $\frac{21}{12}$ che rappresenta il tempo riferito all'anno come unità, colla lettera t ; quindi chiamando r la rendita, avremo

$$r = \frac{c.i.t}{100};$$

vale a dire che per avere la rendita corrispondente ad un certo capitale, impiegato per un dato tempo con una definita ragione

d'interesse; bisogna moltiplicare il capitale per la ragione d'interesse e pel tempo, e separare dal prodotto di questi tre fattori due cifre decimali. Quindi se si chiede il valore della rendita annua, basterà anche moltiplicare il capitale per la ragione d'interesse, e separare dal prodotto le due cifre decimali: così per avere la rendita annua di 570 ducati al 5 per 100, si moltiplicherà 570 per 5, e separando due cifre decimali dal prodotto si avrà il valore della rendita in duc. 28, 50.

197. La formola generale

$$r = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$$

può risolvere tre altri problemi.

— 1.° *Determinare c, conoscendo r, i e t.* Poniamo per esempio che si voglia conoscere il capitale che impiegato alla ragione del 6 $\frac{1}{2}$ per 100, dia la rendita di 400 ducati annui.

Ponendo nella formola $r = 400$, $c = x$, $i = 6,5$ e $t = 1$, abbiamo

$$400 = \frac{6,5 \cdot x}{100}.$$

Trasportando colle note regole (n.°188) 100 e 6,5 nel primo membro dell'equazione, avremo

$$x = \frac{400 \cdot 100}{6,5} = 6153,85.$$

— 2.° *Determinare i, conoscendo r, c e t.* Un capitalista ha dimandato per 10 mesi 100 ducati sopra 1300: si vuol sapere la ragione dell'interesse.

Mettiamo nella formola $r = 100$, $t = \frac{10}{12}$, $c = 1300$, $i = x$; ne risulterà

$$100 = \frac{1300 \cdot 10 \cdot x}{100 \cdot 12} = \frac{65x}{6};$$

quindi $600 = 65x$, ed $x = \frac{600}{65} = 9,23$.

— 3.° *Determinare t, essendo noti c, r ed i* — Si vuol sapere, per esempio, il tempo pel quale dovrà rimanere impiegato il ca-

pitale 2730, perchè aggiungendovi gl' interessi alla ragione di 5,75 per 100, la somma risulti eguale a 3000.

Abbiamo così $c = 2730$, $r = 270$, $i = 5,75$, $t = x$; quindi la formola ci darà

$$270 = \frac{2730 \cdot 5,75 \cdot x}{100},$$

donde
$$27000 = 2730 \cdot 5,75 x$$

ed
$$x = \frac{27000}{2730 \cdot 5,75} = 1,74,$$

ossia 1 anno, 8 mesi e 19 giorni.

198. Abbiamo detto nel n.° 186 che il metodo delle equazioni comprende in se quello della regola del tre. Perchè questo principio venisse rifermato da fatti, ritorniamo sul problema risoluto nel n.° 195, e di cui trascriviamo i dati.

Oper.	Lung.	Larg.	Prof.	Resist. del ter.	Ore di lav.	Gior.
10	100	6	5	2	8	12
8	120	5	4	3	10	x .

Da questi dati si rileva che i primi operai hanno cavato 100.6.5 palmi di terra; e questo lavoro è stato eseguito da 10 operai in 12 giorni lavorando 8 ore al giorno. In conseguenza un solo operaio in 1 giorno avrebbe fatto $\frac{1}{12 \cdot 10}$ di 100.6.5, e per 1 ora il

lavoro sarebbe stato $\frac{1}{12 \cdot 10 \cdot 8}$ di 100.6.5, ossia $\frac{100.6.5}{12 \cdot 10 \cdot 8}$.

Similmente si troverà che pei secondi operai il lavoro di 1 ora sarà espresso da $\frac{120 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 10 \cdot x}$.

Se il terreno pel secondo lavoro fosse egualmente resistente che lo è stato pel primo, la quantità di cavamento fatto in 1 ora da un operaio della 1^a compagnia sarebbe eguale a quella che eseguirebbe in egual tempo un operaio della 2^a. Ma poichè il 2^o terreno offre una resistenza $\frac{3}{2}$ di quella del primo, nella stessa ragione dovrà decrescere la quantità di lavoro fatto da un operaio della 2^a compagnia, ossia che questi non potrà fare che $\frac{2}{3}$ del lavoro fatto in egual tempo da un operaio della 1^a. Quindi avremo

$$\frac{120 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 10 \cdot x} = \frac{2}{3} \text{ di } \frac{100.6.5}{12 \cdot 10 \cdot 8} = \frac{2 \cdot 100.6.5}{3 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 8};$$

e facendo passare il divisore di ciascun membro di questa equazione come fattore nell'altro, avremo

$$120.5.4.3.12.10.8 = 2.100.6.5.8.10.x,$$

relazione identica a quella trovata per mezzo delle proporzioni.

Trattiamo similmente il problema risolto nel n.° 196; vale a dire di determinare la rendita che si avrà in 21 mesi dal capitale 2890 impiegato alla ragione annua del 7 per 100.

Poichè 100 ducati danno 7 ducati in 12 mesi, 1 ducato in 1 mese darà $\frac{1}{100.12}$ di 7 ducati, ossia $\frac{7}{100.12}$; quindi in 21 mesi 1 ducato darà la rendita $\frac{7.21}{100.12}$, e 2890 ducati daranno $\frac{2890.7.21}{100.12}$ come nel n.° 196.

CAPO TERZO.

Regola di sconto, e di società.

199. La regola di sconto non è che il metodo di soluzione del seguente problema — *Determinare secondo una data ragione d'interesse il valore attuale di un credito che non si può esigere prima di un dato tempo* — Poniamo per esempio che A dovesse a B 1400 ducati da pagarsi dopo 7 mesi; e che intanto B vendesse il suo credito a C, il quale vuol comperarlo chiedendo un interesse alla ragione del $\frac{3}{4}$ per 100 al mese, pel tempo che deve attendere. Quel che C dovrà ritenere per interesse su i 1400 ducati, costituisce lo *sconto*, il residuo della somma rappresenterà il *valore attuale* del credito.

È chiaro che la risoluzione del problema consiste nel dividere il numero 1400 in due parti tali che una rappresentando capitale, l'altra ne sia l'interesse corrispondente per 7 mesi alla ragione del $\frac{3}{4}$ per 100 al mese. Questa ragione d'interesse divenendo in 7 mesi $\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4} = 5,25$, il numero 1400 si dovrà

dividere in due parti proporzionali a 100 e 5,25. Chiamando x la parte proporzionale a 100, e che rappresenterà il valore attuale del capitale, avremo la proporzione.

$$x : 1400 = 100 : 100 + 5,25$$

quindi
$$x = \frac{1400 \cdot 100}{105,25} = 1330,16.$$

Ecco il valore attuale del credito: lo sconto poi è dato da $1400 - 1330,16 = 69,84$. E per assicurarsi che il problema sia stato ben risoluto non si avrà a far altro che calcolare l'interesse alla ragione del 5,25 per 100 sulla somma 1330,16, e si troverà eguale a 69,84.

Ed in generale chiamando c la somma del credito, i la ragione dello sconto, e t il tempo, avremo il valore v del credito rappresentato dalla formola

$$v = \frac{100c}{100 + t.i}$$

200. Questo metodo di calcolare lo sconto è conosciuto nel commercio sotto il nome di *sconto al di dentro*. Avvene ancora un altro, ed è quello usato generalmente, distinto col nome di *sconto al di fuori*, e che consiste nel valutare l'interesse sull'intera somma del credito. Così nel problema precedente lo sconto su 1400 per 7 mesi sarebbe rappresentato da $\frac{1400 \cdot 5,25}{100} = 73,50$.

L'inesattezza di questo secondo metodo sarà manifesta sol che si consideri che si valuta l'interesse dell'intera somma di cui una parte soltanto è capitale.

201. La *regola di società* non è che un'altro caso della divisione di un numero in parti proporzionali a numeri dati. Il suo scopo è quello di divider la somma di un lucro o di una perdita tra più associati proporzionatamente ai capitali impiegati ed al tempo per cui sono stati in commercio.

Poniamo per esempio che più persone A, B, C, ec. associatesi in una speculazione commerciale abbiano lucrato 800 ducati, impiegando dei capitali e per un tempo come qui appresso.

Soci.	Capitali.	Tempi.	Capitali ridotti.	Parti del lucro.
A	600	8 mesi	4800	101,85.6
B	400	5 —	2000	42,44
C	800	4 —	3200	67,90.4
D	500	6 —	3000	63,66
E	200	9 —	1800	38,19.6
F	300	10 —	3000	63,66
G	700	7 —	4900	103,07.8
H	900	11 —	9900	210,70.8
L	550	6 —	3300	70,02.8
M	450	4 —	1800	38,19.6
			37700	799,99.6

Le prime tre colonne di questo quadro non hanno bisogno di schiarimento veruno, poichè contengono i dati del problema.

La 4^a colonna contiene i valori dei capitali ridotti all'unità di tempo. Essendo la porzione di lucro dovuta ad ogni socio, dipendente dal capitale e dal tempo per cui è stato impiegato, è chiaro che fatto il tempo eguale per tutti, le parti saranno proporzionali ai soli capitali, e la soluzione del problema diverrà più facile. Questa riduzione si è fatta per mezzo del semplicissimo principio che moltiplicando un capitale per lo stesso numero per cui si divide la durata del suo impiego, la rendita resterà invariata. Così al socio A, per esempio, che ha impiegato 600 ducati per 8 mesi, spetterà quella stessa porzione di lucro che gli sarebbe toccata, se avesse impiegato un capitale 8 volte più grande, ossia 4800, per un tempo 8 volte minore, vale a dire per un mese. Similmente si sono ridotti gli altri capitali all'unità di tempo, moltiplicandoli poi rispettivi numeri di mesi.

La 5^a colonna contiene le porzioni di lucro dovute ai rispettivi soci, che sono state calcolate nel seguente modo. In vece di fare tante proporzioni per quanti sono i soci, se n'è stabilita una sola, colla quale si è determinata la parte di lucro che sarebbe toccata al capitale 100, vale a dire che si è piantata la proporzione

$$37700 : 100 = 800 : x,$$

essendo 37700 la somma dei capitali ridotti, ed 800 il lucro totale. Dalla quale proporzione si è ottenuto $x = 2,12201$; cono-

sciuta la porzione che sarebbe spettata al capitale 100 , è stato facile calcolare quelle proporzionali ai diversi capitali ridotti : così per avere la parte dovuta ad A, si è stabilita la proporzione

$$y : 2,12201 = 4800 : 100$$

donde $y = \frac{4800 \times 2,12201}{100} = 101,85,6 ;$

vale a dire che la porzione di ciascun socio si ottiene moltiplicando il suo capitale ridotto pel lucro dovuto a 100 , e poi facendo retrocedere la virgola di due passi a sinistra. In questo modo , in vece di risolvere tante proporzioni per quanti sono i soci , è stato sufficiente di eseguire altrettante moltiplicazioni.

È d' uopo però avvertire che nel determinare la porzione di lucro dovuta al capitale 100 , bisognerà approssimarne a sufficienza il valore se dalla divisione non è dato esatto , affinchè nel fare la somma delle porzioni di lucro si abbia un numero che differisca di una quantità trascurabile dall' intero guadagno. Se nell' esempio recato si è ottenuto un numero che di soli 4 decimi di grano differisce da 800 , ciò è dipeso dalla sufficiente approssimazione di $x = 2,12201$.

CAPO QUARTO.

Regola congiunta , e di allegazione.

202. Poniamo che si voglia conoscere a quanti palmi napolitani equivalgono 35 piedi inglesi , conoscendo che

$$\begin{array}{l} 97 \text{ palmi napolitani} = 79 \text{ piedi francesi,} \\ \text{e} \quad 15 \text{ piedi francesi} = 16 \text{ piedi inglesi.} \end{array}$$

Le espressioni 97 palmi napolitani, 79 piedi francesi, ec. essendo equivalenti a 1 palmo napolitano $\times 97$, 1 piede francese $\times 79$, ec. ; le relazioni date si potranno risolvere nelle proporzioni

$$\begin{array}{l} 1 \text{ palmo napolitano} : 1 \text{ piede francese} = 79 : 97 \\ 1 \text{ piede francese} : 1 \text{ piede inglese} = 16 : 15; \end{array}$$

alle quali aggiungeremo la terza proporzione

$$1 \text{ piede inglese} : 1 \text{ palmo napolitano} = x : 35,$$

nascente dalla relazione richiesta di x palmi napolitani equivalenti a 35 piedi inglesi.

Moltiplicando termine a termine le tre proporzioni, e sopprimendo i fattori comuni ai due termini del primo rapporto della proporzione risultante, avremo

$$1 : 1 = 79.16.x : 97.15.35,$$

vale a dire che sarà

$$79.16.x = 97.15.35.$$

donde $x = 40,288$, vale a dire che sono

$$35 \text{ piedi inglesi} = 40,288 \text{ palmi napolitani.}$$

Or questa equazione, che definisce gli x palmi napolitani equivalenti ai 35 piedi inglesi, si sarebbe ancora ottenuta moltiplicando i numeri corrispondenti delle tre relazioni

$$97 \text{ palmi napolitani} = 79 \text{ piedi francesi}$$

$$15 \text{ piedi francesi} = 16 \text{ piedi inglesi}$$

$$35 \text{ piedi inglesi} = x \text{ palmi napolitani.}$$

Ed in questa moltiplicazione consiste la *regola congiunta*, così denominata perchè congiunge in una sola tutte le relazioni date; le quali per essere sufficienti alla soluzione del problema debbono esser tali da condurci all'equivalenza richiesta per mezzo di una serie di rapporti, continuati in modo che il 1° membro della 1ª equivalenza sia della stessa denominazione del 2° membro dell'ultima. Così nel problema risoluto siamo pervenuti all'equazione che ha definito gli x palmi napolitani equivalenti a 35 piedi inglesi, per mezzo delle relazioni del palmo napolitano al piede francese, e di questo al piede inglese. Perciò le equivalenze da riunirsi per mezzo della regola congiunta, dovranno essere ordinate in modo, l'una sotto dell'altra, che il 1° membro di ognuna di esse sia della stessa denominazione del 2° membro della precedente.

Dunque in generale, la regola congiunta fa determinare l'immediato rapporto di due unità omogenee per mezzo di rapporti mediati con altre unità della stessa natura.

203. La *regola di allegazione* poi si propone primieramente di determinare il prezzo dell'unità di misura di una miscela, conoscendo i prezzi e le quantità delle sostanze mescolate. Poniamo per esempio che un negoziante avendo mescolato 5 barili di vino del prezzo di duc. 3,20 per ogni barile, con 7 barili di un'altro vino del prezzo di duc. 4 a barile, voglia sapere il prezzo che dovrà avere un barile della miscela. Abbiamo

pei 5 barili a duc. 3,20 l'uno	duc. 16
pei 7 barili a duc. 4 l'uno	duc. 28
Prezzo della miscela.	duc. 44

Or la miscela componendosi di 12 barili, un barile di essa vale-
rà duc. $\frac{44}{12} = \text{duc. } 3,67$.

Ed in generale chiamando $p, p', p'',$ ec. i prezzi delle diverse sostanze mescolate insieme, $q, q', q'',$ ec. le quantità di esse, il prezzo x dell'unità di misura della miscela sarà dato dall'espressione

$$x = \frac{p \cdot q + p' \cdot q' + p'' \cdot q'' + \dots}{q + q' + q'' + \dots}$$

204. Con questa formola generale si possono risolvere dei problemi relativi alle leghe metalliche, e dai quali la regola ha tolto il suo nome di *regola di allegazione*. Supponiamo, per esempio che si voglia conoscere il titolo di una lega di argento, risultante dalla fusione di 24 libbre di argento a 0,825 di fino, di 12 libbre a 0,9 e di 18 libbre a 0,845.

Le 24 lib. a 0,825 di fino conterranno di argento puro lib. 24 X 0,825 = lib. 19,8	
Le 12 lib. a 0,9 di fino ne conterranno	lib. 12 X 0,9 = lib. 10,8
Le 18 lib. a 0,845 di fino ne conterranno	lib. 18 X 0,845 = lib. 15,21
Totale dell'argento puro = lib. 45,81	

Or la massa della lega è di libbre $24 + 12 + 18 = 54$, quindi il suo titolo sarà $\frac{45,81}{54} = 0,848$ circa.

Colla stessa formola si determina ancora il risultamento medio di molte sperienze, il valore medio di più misure di una stessa grandezza, ec. ec.

205. Passiamo ora a vedere come la regola di allegazione faccia risolvere la quistione inversa della precedente, e che noi considereremo nel caso più semplice. Qui sopra abbiamo trovato che chiamando p e p' i prezzi di due sostanze mescolabili, q e q' le loro quantità, il prezzo x dell'unità di misura del mescuglio sarà

$$x = \frac{p \cdot q + p' \cdot q'}{q + q'}.$$

Or supponiamo dati i prezzi p e p' , e che si cerchino le quantità q e q' (che chiameremo x ed y) necessarie a dare il prezzo k all'unità di misura della mescolauza. Avremo così

$$k = \frac{px + p'y}{x + y}.$$

Passando il divisore $x + y$ come fattore nel 1° membro, ne risulterà l'equazione

$$kx + ky = px + p'y,$$

nella quale trasportando px nel 1° membro e ky nel secondo, si avrà

$$kx - px = p'y - ky$$

ossia

$$(k - p)x = (p' - k)y,$$

equazione che evidentemente sarà soddisfatta, se in essa poniamo $x = p' - k$ ed $y = k - p$.

Supponiamo che avendosi due qualità di farina, l'una di duc. 2,20 il tomolo e l'altra di duc. 3, si voglia sapere in qual proporzione debbano mescolarsi, perchè ne risulti una specie di duc. 2,80 il tomolo. In questo caso si ha $p = 22$, $p' = 30$, $k = 28$; quindi $x = 30 - 28 = 2$, $y = 28 - 22 = 6$. Vale a dire che ordinando i dati, come qui a fianco, la quantità 2 della farina di minor prezzo si ottiene sottraendo dal prezzo maggiore il prezzo medio, e da questo sottraendo il

$$28 \left| \begin{array}{l} 30 \cdot \cdot 6 \\ 22 \cdot \cdot 2 \end{array} \right.$$

minore, si avrà la quantità che si dovrà prendere della farina di prezzo maggiore.

Se si volesse inoltre che la miscela fosse di m unità di misura, allora avremmo le due equazioni

$$x + y = m \quad \text{e} \quad (k-p)x - (p'-k)y = 0.$$

Moltiplicando la 1^a per $p' - k$, si ottiene

$$(p' - k)x + (p' - k)y = (p' - k)m,$$

la quale addizionata colla 2^a ci darà

$$(p' - p)x = (p' - k)m,$$

donde
$$x = \frac{m}{p' - p} (p' - k);$$

valore che sostituito nell'equazione $x + y = m$, ci dà

$$y = \frac{m}{p' - p} (k - p).$$

Vale a dire che bisognerà moltiplicare per $\frac{m}{p' - p}$ i valori precedentemente trovati di $x = p' - k$ ed $y = k - p$.

Poniamo per esempio che nel problema precedente si fosse anche richiesta la condizione che la miscela dovesse equivalere a 15 tomoli. Allora i valori $x = 2$ ed $y = 6$ bisognerà moltiplicarli per $\frac{15}{30-22} = \frac{15}{8}$; quindi avremo

$$\begin{array}{l} \text{della farina di 22 carlini tomoli } 2 \times \frac{15}{8} = 3 + \frac{3}{4} \\ \text{e di quella di 30 carlini tomoli } 6 \times \frac{15}{8} = 11 + \frac{1}{4} \\ \hline \text{Totale : : 15} \end{array}$$

Sia dato ancora di dover formare una massa di 7 libbre di argento a 0,84 di fino, fondendo insieme due qualità dello stesso metallo, l'una a 0,91 di fino e l'altra a 0,79. Osservando che in questo problema abbiamo $m = 7$, $p = 0,79$, $p' = 0,91$, $k = 0,84$, avremo (ordinando l'operazione come qui appresso)

che bisognerà fondere 4 libbre ed 1 oncia dell' argento a 0,79
con 2 libbre ed 11 once dell' argento a 0,91

$$0,81 \left\{ \begin{array}{l} 0,91 \dots 0,05 \times \frac{7}{12} = \frac{35}{12} = 2^{\text{lib.}} + 11^{\text{on.}} \\ 0,79 \dots 0,07 \times \frac{7}{12} = \frac{49}{12} = 4^{\text{lib.}} + 1^{\text{on.}} \end{array} \right.$$

Totale = 7 libbre

CAPO QUINTO.

*Problemi d'interesse composto.***Problema I.**

Dato il valore di un capitale e data la ragione dell'interesse, determinare ciò che diverrà il capitale dopo un certo numero di anni, supponendo che in ogni anno la rendita vada in aumento del capitale.

Chiamando c il capitale dato ed r la rendita annua di 1 ducato, dopo il 1° anno il capitale c sarà divenuto

$$c + r.c = c(1 + r) = c'.$$

Similmente al terminare del 2° anno il capitale c' sarà divenuto

$$c' + rc' = c'(1 + r);$$

ma $c' = c(1 + r)$; perciò sostituendo avremo

$$c' + rc' = c(1 + r)(1 + r) = c(1 + r)^2.$$

Nello stesso modo si troverà che dopo 3 anni il capitale sarà divenuto $c(1 + r)^3$, dopo 4 anni $c(1 + r)^4$; e dopo n anni sarà $c(1 + r)^n$. Perciò chiamando C il valore del capitale al termine del n^{esimo} anno, avremo

$$C = c(1 + r)^n \dots (a).$$

Poniamo per esempio che si voglia sapere ciò che diverranno 4000 ducati impiegati ad interesse composto (ossia aggiungendo

sempre la rendita al capitale) colla ragione del 5 per 100 per 12 anni. Abbiamo così $c = 4000$, $n = 12$; ed essendo 5 la rendita di 100 ducati, quella di 1 ducato sarà 0,05, e perciò $r = 0,05$. Sostituendo questi valori nella formola si ottiene

$$C = 4000 \cdot 1,05^{12}.$$

Prendendo i logaritmi di queste due quantità eguali, avremo

$$\begin{aligned} \log.C &= \log.4000 + 12 \cdot \log.1,05 \\ \log.1,05 &= 0,02119, \quad 12 \cdot \log.1,05 = 0,25428 \\ \log.4000 &= 3,60206 \\ \log.C &= 3,85634 \end{aligned}$$

A questo logaritmo corrisponde il numero 7183, che sarà il valore di C , ossia dei 4000 ducati che per 12 anni sono stati aumentati in ogni anno della corrispondente rendita alla ragione del 5 per 100. Or se il capitalista ritirasse in ogni anno la rendita dei 4000 ducati, dopo 12 anni avrebbe esatto $12 \cdot \frac{4000 \cdot 5}{100} = 2400$ ducati di rendita. Ma il valore di $C = 7183$, superando 4000 di 3183, ci fa conoscere che di altrettanto è stata la rendita totale prodotta dall'interesse composto; dunque $3183 - 2400 = 783$ rappresenterà l'interesse dell'interesse.

Oltre questo problema, nel quale essendo dati c , r ed n si è determinato C , la formola (a) può risolverne altri tre.

— 1° *Dati i valori di C , r ed n determinare c* — Supponiamo che si voglia conoscere qual capitale bisognerebbe impiegare ad interesse composto e colla ragione del 6 per 100, perchè ascendesse a 12000 ducati dopo 10 anni. In questo problema abbiamo $C = 12000$, $r = 0,06$, $n = 10$, $c = x$; quindi

$$\begin{aligned} 12000 &= x \cdot 1,06^{10}, \\ \text{e} \quad \log.12000 &= \log.x + 10 \cdot \log.1,06, \\ \text{dove} \quad \log.x &= \log.12000 - 10 \cdot \log.1,06 \\ &\quad \log.12000 = 4,07918 \\ &\quad 10 \cdot \log.1,06 = 0,25306 \\ &\quad \log.x = 3,82612 \end{aligned}$$

Al quale logaritmo 3,82621 corrispondendo il numero 6700, questo rappresenterà il valore del capitale richiesto.

— 2° *Dati i valori di C, c ed r determinare n* — Si vuol sapere, per esempio, dopo quanti anni 4000 ducati, impiegati ad interesse composto secondo la ragione del $4\frac{1}{2}$ per 100, diverranno 8000. Ponendo nella formola $C=8000$, $c=4000$, $r=0,045$, $n=x$, avremo

$$8000 = 4000 \cdot 1,045^x;$$

e dividendo per 4000 i due membri dell'equazione, ne risulterà

$$2 = 1,045^x;$$

quindi

$$\log. 2 = x \cdot \log. 1,045,$$

ed

$$x = \frac{\log. 2}{\log. 1,045}.$$

$$\begin{array}{l|l} \log. 2 = 0,30103 & \frac{\log. 2}{\log. 1,045} = 15,74. \\ \log. 1,045 = 0,01902 & \end{array}$$

Bisogneranno dunque anni $15,74 = 15$ anni e 9 mesi circa, perchè i 4000 ducati divengano 8000.

— 3° *Dati i valori di C, c, ed n, determinare r* — Un capitalista ha prestato 6000 ducati a condizione di averne 8000 dopo 4 anni: si vuol sapere a qual ragione ha impiegato il suo danaro — Bisogna determinare la ragione incognita mercè la formola (a), poichè il capitalista ritirando in ogni anno la rendita del suo capitale, avrebbe potuto impiegarla e trarne in conseguenza un altro beneficio — Ponendo dunque nella formola $C=8000$, $c=6000$, $n=4$, $r=x$, avremo

$$8000 = 6000(1+x)^4,$$

ossia

$$4 = 3(1+x)^4,$$

i cui logaritmi ci danno

$$\log. 4 = \log. 3 + 4 \cdot \log. (1+x);$$

quindi

$$\log. (1+x) = \frac{\log. 4 - \log. 3}{4}$$

$$\begin{array}{l|l} \log. 4 = 0,60206 & \frac{\log. 4 - \log. 3}{4} = 0,031235 \\ \log. 3 = 0,47712 & \\ \hline \log. 4 - \log. 3 = 0,12494 & \end{array}$$

Nella tavola si trova che al logaritmo 0,031235 corrisponde il numero 1,07457. Avremo dunque

$$1 + x = 1,07457,$$

quindi

$$x = 0,07457.$$

Dunque il capitalista ha impiegato il suo danaro alla ragione del 7,457 per 100.

Problema II.

Una persona depone in ogni mese sopra una Cassa di risparmio una somma a , e ne riceve un interesse alla ragione r per ducato: si vuol sapere ciò ch'essa possederà dopo n mesi.

I primi a ducati, restando impiegati per n mesi, dopo questo tempo saranno divenuti $a(1+r)^n$; similmente i secondi a ducati avranno acquistato il valore $a(1+r)^{n-1}$; $a(1+r)^{n-2}$ saranno divenuti i terzi, e così di seguito fino all'ultima somma a che sarà eguale ad $a(1+r)$. In conseguenza il capitale C che si avrà dopo gli n mesi sarà espresso dalla somma dei termini della progressione geometrica

$\therefore a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : \dots a(1+r)^{n-1} : a(1+r)^n$,
vale a dire che si avrà

$$C = a(1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Per un'applicazione di questa formola supponiamo che la Cassa dia il beneficio del 4 per 100 all'anno, e che per 30 anni si paghino 5 ducati al mese: si avrà $a = 5$, $n = 30.12 = 360$ mesi; e poichè il 4 per 100 all'anno diviene $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ per un mese, la rendita di un ducato per un mese sarà $r = \frac{1}{300}$. Sostituendo questi numeri alle corrispondenti lettere nella formola, avremo

$$C = 5 \left(1 + \frac{1}{300} \right) \frac{\left(1 + \frac{1}{300} \right)^{360} - 1}{\frac{1}{300}} = 5.301 \left[\left(\frac{301}{300} \right)^{360} - 1 \right].$$

Prendendo il logaritmo di $\left(\frac{301}{300}\right)^{360} = 360.(\log.301 - \log.300)$, si troverà il numero corrispondente essere 3,3135. Questo numero, diminuito di 1, sarà il fattore compreso tra parentesi; e così avremo

$$C = 5.301.2,3135 = 3481,8175.$$

Trascurando le 4 cifre decimali perchè dubbie, avremo a meno di 1 ducato $C = 3481$. Or per 360 mesi si sono pagati ducati $5.360 = 1800$, gli altri 1681 ducati, che bisognano per completare la somma 3481, rappresenteranno il beneficio del risparmio.

Problema III.

Un capitalista dà una somma C alla ragione r per ducato, e riceve in isconto una rendita annua a; si vuol sapere per quanti anni gli dev'essere devoluta, perchè sia soddisfatto del capitale e degl'interessi corrispondenti.

Chiamiamo n il numero degli anni. Dopo questo tempo il capitale C sarebbe divenuto $C(1+r)^n$, somma che il debitore dovrebbe soddisfare con un solo pagamento al terminare del n esimo anno. Ma gli a ducati che paga al termine del 1° anno, essendo anticipati di $n-1$ anni, avranno dopo questo tempo acquistato il valore $a(1+r)^{n-1}$; similmente i secondi a ducati saranno divenuti $a(1+r)^{n-2}$, ec. Dimodochè le n annualità saranno equivalenti a

$$a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} + \dots + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Or perchè il creditore sia soddisfatto del suo avere, è necessario che il valore delle n annualità pareggi quello del suo credito; quindi dovrà essere

$$C(1+r)^n = a \frac{(1+r)^n - 1}{r} \dots (b).$$

Passando r come fattore nel 1° membro dell'equazione, avremo

$$Cr(1+r)^n = a(1+r)^n - a;$$

e trasportando a nel 1° membro e $Cr(1+r)^n$ nel 2°, si ottiene

$$a = a(1+r)^n - Cr(1+r)^n = (a - Cr)(1+r)^n,$$

donde
$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Cr}.$$

Prendendo i logaritmi di queste due quantità eguali, si ha

$$n \cdot \log.(1+r) = \log.a - \log.(a - Cr),$$

da cui si ottiene

$$n = \frac{\log.a - \log.(a - Cr)}{\log.(1+r)}.$$

Poniamo per esempio che si fossero prestati ducati 12000 al

5 $\frac{1}{2}$ per 100, prendendo in isconto una rendita annua di ducati

1000. Avremo in questo caso $a = 1000$, $C = 12000$,

$$r = \frac{5,5}{100} = \frac{55}{1000} = \frac{11}{200}; \text{ quindi } Cr = 12000 \cdot \frac{11}{200} = 660,$$

ed $a - Cr = 1000 - 660 = 340$. Perciò

$$n = \frac{\log.1000 - \log.340}{\log.\left(\frac{211}{200}\right)} = 20,867.$$

Dunque la rendita dovrà essere devoluta per 21 anni al creditore, nell'ultimo dei quali si pagheranno duc. 867 in vece di 1000.

Se in questo problema si supponesse la rendita annua di ducati 660, avremmo $a - Cr = 0$, il cui logaritmo essendo $-\infty$, l'espressione di n diverrebbe

$$n = \frac{\log.660 + \infty}{\log.\frac{211}{200}} = \infty.$$

Ed in vero 660 essendo l'interesse annuo di 12000 alla ragione del 5 $\frac{1}{2}$ per 100, il debitore non pagando in ogni anno che il solo interesse, lascerebbe intatto il capitale, e quindi il debito sarà estinto in un numero infinito di anni, vale a dire che non sarà estinto giammai.

La stessa formola (b) può risolvere due altri problemi

— 1° *Dati i valori di a , r ed n , determinare C* — Dalla formola (b) avremo

$$C = \frac{a(1+r)^n - a}{r(1+r)^n}.$$

Poniamo per esempio che un individuo A avendo una rendita vitalizia di 200 ducati annui, voglia cederla a B in cambio di un equivalente capitale. Supponiamo che ad A resti una probabilità di vita per altri 24 anni, e che per questa durata B ne abbia garanzia da una Società di assicurazioni. Or dato l'interesse alla ragione del 7 per 100, si vuol sapere il capitale equivalente alla rendita vitalizia di 200 ducati. Sostituendo nella formola i corrispondenti valori numerici, avremo

$$C = 200 \frac{(1,07)^{24} - 1}{0,07(1,07)^{24}} = 20000 \frac{(1,07)^{24} - 1}{7(1,07)^{24}}.$$

Calcolando per mezzo di logaritmo il valore di $(1,07)^{24}$, e sostituendone il numero corrispondente 5,0724 sull'espressione di C, avremo (eseguito il calcolo che vi è indicato) $C = 2857$, che sarà il capitale equivalente alla data rendita vitalizia.

— 2° Dati i valori di C, r ed n determinare a — La formola (b) ci dà

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Dovendosi, per esempio, soddisfare in 7 anni a pagamenti trimestrali un debito di duc. 12000 coll'interesse al 6 per 100: si vuol sapere il quanto di ogni pagamento.

La ragione annua del 6 per 100 diviene $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ per un trimestre, quindi $r = \frac{3}{200}$. Abbiamo inoltre $C = 15000$, $n = 28$ trimestri; perciò $Cr = 15000 \cdot \frac{3}{200} = 225$, ed $1+r = \frac{203}{200}$. Sostituendo questi valori nella formola, avremo

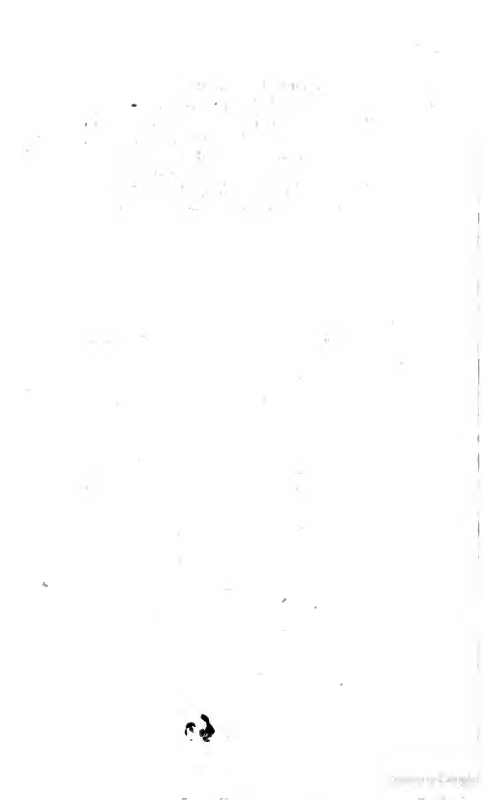
$$a = \frac{225 \left(\frac{203}{200} \right)^{28}}{\left(\frac{203}{200} \right)^{28} - 1}$$

Ponendo in vece di $\left(\frac{203}{200} \right)^{28}$ il suo valore 1,5172 ottenuto per mezzo di logaritmi, troveremo $a = 560,03$ che sarà il valore di ciascun pagamento trimestrale.

FINE.

SBN 607637





CONSIGLIO GENERALE

DI

PUBBLICA ISTRUZIONE

Ri.° Car.°

N.° 21.

Oggetto

Napoli 10 dicembre 1851.

Vista la domanda del Tipografo Federico Vitale con che à chiesto di ristampare — Gli Elementi di Aritmetica del Professore Michele Zannotti.

Visto il parere del R. Revisore signor D. Francesco Bruni.

Si permette che la suindicata opera si ristampi; però non si pubblichi senza un secondo permesso che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto nel confronto esser l'impressione uniforme all' originale approvato.

Il Presidente interino
FRANCESCO SAVERIO APUZZO.

Il Segretario interino
GIUSEPPE PIETROCOLA.

